BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EMANUELE
14
34 I
164

FARNESI ALFREDO
ROMA
B.V.E.
LEGATORE DI LIBRI

14-24 B. 14

14.34 I.16

IACOBI PELETARII CENOMANI, DE OCCVLTA PARTE NVMERORVM, QVAM Algebram vocant, Libri duo.



BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

PARISIIS,

Apud Gulielmum Cauellat, ſub pingui Gallina, ex aduerſo Collegij Cameracenſis.

1560.

CVM PRIVILEGIO.

EXTRAICT DES REGISTRES de Parlement.

LA Court, ayant egard a la requeſte a elle preſentée par Guillaume Cauellat, Libraire iuré en l'vniuerſité de Paris, a permis & permet audict Cauellat, imprimer, ou faire imprimer, & vendre vn liure intitulé Algebra Iacobi Peletarij. Et ce, pendans quatre ans, à commencer du iour que ledict liure ſera acheué d'imprimer. Inhibant & defendant à tous Imprimeurs, libraires, & autres, d'imprimer ou vendre ne faire vendre ou imprimer ledict liure pendans leſdicts quatre ans, ſans l'adueu & conſentement dudict Cauellat. Sur peine de confiſcation de ce qui ſera trouué imprimé au preiudice, & par deſſus leſdictes defenſes, & d'amende arbitraire. Faict en parlement, le quatrieſme iour de Decembre, l'an mil cinq cens cinquante neuf.

Collation eſt faicte, *Signé Camus.*

OPERIS IN CAPITA DISTRIBVTIO.

LIBER PRIMVS.

DE Numeris Creatis, quos vulgò Radicales vocant: ac de ipſorum notis. Caput 1
De Numerorum Creatorum ſitu, progreſſu, & expoſitione. 2
De inueniendis notis ad Exponentes Numeros pertinentibus, & è diuerſo. 3
De Numeris ſpeciatim ad Algebræ calculũ ſpectãtibus. 4
De Additione & Subtractione Denominatorum. 5
De Multiplicatione & Diuiſione Denominatorum. 6
De Multiplicatione Denomin. Quadr. Cub. & reliquis. 7
De Numeris Denominatis Compoſitis & Diminutis, & de ipſorum Additione & Subtractione. 8
De Multiplicatione & Diuiſione Denominatorum Compoſitorum & Diminutorum. 9
De Minutiis ſeu fragmentis Denominatorum. 10
De AEquatione. 11
De trãſpoſitione particularum AEquationis, ſignorúmque Pluris & Minoris. 12
De Reductione ad minimam Denominationem. 13
De reducẽda æquatione Minut. ad æquationẽ integrorum. 14
De Radicum extractione ex Denominatis Compoſitis & Diminutis. 15
De inueniẽdis generatim Radicibus Denominatorum. 16
Regulæ, quam Algebram vocant, ſumma. 17
De compendiis Minutiarum. 18
De Exemplis quæ Diuiſione ſola abſoluuntur. 19
De Exemplis ad Radicis extractionem pertinentibus. 20
De ſecundis Radicibus. 21
De Additione & Subtractione ſecundarum Radicum. 22
De Multiplicatione ſecundarum Radicum. 23
De Diuiſione ſecundarum Radicum. 24
De Extractione ſecundarum Radicum. 25
De ſecundarum Radicum probatione. 26
De Exẽplis ad ſecundas Radices pertinentibus. 27

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

DE Numeris Irrationalibus in vniuerſum. Caput 1
Numeri Irrationales ſintne Numeri an non. 2
De Irrationalium quinque ſpeciebus. 3
De Reductione Irrationalium ad idem ſignum. 4
De cognoſcendis Medialibus, ſintne commenſurabiles an non, & qua inter ſe ſint proportione. 5
Duos Mediales in proportione nominata reperire. 6
De Medialium Additione. 7
De Medialium Subtractione. 8
De Medialium Multiplicatione & Diuiſione. 9
De Medialiũ Multiplicatione Quadrata, Cub. & reliquis. 10
Inter duos Num. datos medium proportionalem reperire. 11
Additio & Subtractio Irration. Compoſit. & Diminut. 12
Multiplicatio Irrationaliũ Cõpoſitorum & Diminutorum. 13
Diuiſio Irrationalium Compoſitorum & Diminutorum. 14
De Irrationalibus Compoſitis & Diminutis compendia. 15
De vniuerſalibus Cõpoſitis & Diminutis: atq; obiter de Radicibus, quas Ligatas, & quas Diſtinctas vocant. 16
Vniuerſalium Cõpoſitorum ad ſua Diminuta Additio. 17
Vniuerſalium Diminut. à ſuis Compoſitis Subtractio. 18
Vniuerſalium Multiplicatio. 19
Vniuerſalium Diuiſio. 20
De extractione Radicum ex Binomiis & Reſiduis. 21
De Minutiis Irrationalium Numerorum. 22
De Trinomiis quædam obiter. 23
De Multiplicatione Cubica Numerorum Irrationalium Compoſitorum & Diminutorum, & item Vniuerſalium. 24
De Numeris Irrationalibus Denominatis. 25
De Reductione Irrationalium Denominatorum. 26
De Additione, Subtractione, Multiplicatione, & Diuiſione Irrationalium Denominatorum. 27
De Exemplis pertinentibus ad Numeros Irrationales. 28
De inuenienda quantitatum continuarum æſtimatione per Numeros huius artis. 29
De Quadratis & Cubis Numeris quædam præcepta, cum ipſorum Tabula. 30

IACOBI PELETARII

CENOMANI, DE OCCVLTA

PARTE NVMERORVM, AD

Ioannem Capellanum, Regis Archiatrum, Liber Primus.

PRÆFATIO.

QVi de rerũ initiis paulò altius meditantur, Capellane, ij non vni hominũ cuipiam Diſciplinarum inuentionem tribuunt: ſed illarum ſemina non ſecus quàm virtutum in animis noſtris inſita, atque ex igniculis quos Mens illa æterna in nobis excitat, communi quodã genio ſurgere agnoſcunt. Magnam verò in rebus controuerſiam facit temporum fortuna: quæ ſuis vicibus tantã rerũ vbertatem profert, vt qui præſenti pulchritudine potiuntur,

dum nullam tenent memoriam longiorem, ij non modò ſuo ſeculo omnia accepta referant, ſed ne vllam quidem in futurum mutationem animo concipiant. Quibuſdam rurſus ætatibus ea ſenſim incidit calamitas, vt melioris conditionis expectatio nulla ſubeat in animos hominum: atque vbi primùm artes florere cœperint, eæ non poſtliminio reuerſæ, ſed nouæ & omni memoria inauditæ prodire in lucem videãtur. Sic perpetua rerum viciſsitudo efficit, vt qui lõgiùs non proſpiciunt, omnia præſenti conſtitutione metiantur quæ à maioribus veluti per manus non acceperint. Quæ quum ita ſint, non magnoperè laborandum eſſe duco, quem autorem huic Numerorum parti inſcribamus. Sũt qui Gebero tribuant, vt etiam ex viri nomine appellationem Arabicam adepta ſit. Alij Machometi Moſis Arabis filio: alij Diophanto Græco. Ego verò vel eo argumento, quòd ipſi artem exercuerint, aut de ea ſcripſerint, artem iam antè extitiſſe iudico. Vt vt eſt, omnino hæc inter monumenta ingeniorum præcipuum quendam obtinet locum dignitatis: quippe quæ omnes calculos ſubducere doceat, quibus prima illa Numerorum tractatio non ſufficit: vt ſiquid effugiat, non artis, ſed artificis culpa ſit. Singulare verò illius ſpecimen in Geometricis dimen

ſionibus

ſionibus explicandis, & captioſis oſtenſionibus refutandis conſiſtit. In qua illuſtranda multi recentiorum ſuam operam ſtrenuè nauarunt. Inter Latinos, hac noſtra ętate Hieronymus Cardanus, Michael Stifelius, & Ioannes Scheubelius: ſed & paulò ante noſtra tẽpora, Lucas Pacciolus Florentinus, & Stephanus Villafrancus Gallus: Poſt hos Chriſtophorus Ianuerus, Stifelio non multò ſuperior, ij tres patria quiſque lingua. Quorum ego exemplo, eandem ipſam, inter alia opera variè ſcripta, ante aliquot annos Ciuibus noſtris dederam. Sed quum ad Latinos me recepiſſem, & in libros Euclidis, qui de Planis ſunt, demonſtrationes edidiſſem, iam ad decimum librum accinctus, hos libros de occulta parte Numerorum ad Euclidis argumentum imprimis neceſſarios, etiam Latinos feceram. Quos vt aliquandiu ſupprimerem, imò adeò vt Mathematicas ad tempus reponerem, effecerat Medicinę profeſsio (quam & ipſam illarum gratia iam olim intermiſeram (niſi quòd Aſtrologiam ſtudioſiùs mihi ſemper reſeruaui. Quúmque poſt aliquod tempus in mea ſcripta oculos, vt fit, conuerterem, atque hos libros velut ad manumiſsionem proclamantes reſpicerem: veritus ne laboris confecti negligentia, noui conficiendi opportunitatem remoraretur,

mihi otium ſuffuratuſſum, iactura alia aliam ſarciens. Quid quæris? temporis verſuram fecimus, quam nos alia rurſus verſura ſoluemus. Sic ſunt hominum ingenia: ſic nos exercet rerum viciſsitudo. Hac emiſsione, vberior nobis erit facultas abſoluendi ea, quæ in Medicina tractamus. Noſtræ verò illius Gallicæ editionis ſpeciẽ ſic retinuimus, vt multa interim expunxerimus, multa immutauerimus: nouã dixeris. Hãc tuo nomini permittimus, Capellane, quam nos tibi gratam fore non diffidimus, homini in omnibus Matheſeos partibus optimè exercitato. Quantum verò in commune contulerimus, res indicabit. Certè vt ars ſua methodo conſtaret, neque poſthac in deſperationem adduceret Mathematicarum ſtudioſos, ſedulò curauimus. Iam in rem præſentem veniamus.

DE NVMERIS CREATIS, QVOS VVLGO RADICALES VOCANT, ac de ipſorum notis.

CAP. PRIMVM.

NVMERORVM omnium vſus in Algebram cadit, ſed eorum exquiſitè qui Radicem habẽt, quos ab ea quã è lateribus ducunt, origine, Creatos appellabimus: Radicales vulgò dicunt. Od id, in Radicum inuentione plurimũ hæc ars cõſiſtit.

Creatorum itaque numerorum, primus eſt Quadratus: qui fit ex numero quolibet in ſe ducto. Cenſus vernacula Italorum lingua dictus eſt, opinor quòd Quadratus numerus ſit prouentus quidam numeri in ſe ducti. Quum verò in hac Numerorum parte, longè maximum vſum afferant notæ, Creatos quoſque numeros propriis notis deſignabimus. Quod qui alienum ab arte exiſtimabũt, ij notas Vnius, ſeu, vt dicitur, Vnitatis, Binarij, Ternarij, omnium denique Numerorum ab arte eximant, atque vna opera artem ipſam de medio tollant, vt nouam comminiſcantur. Quæ obſcura ſunt, ea non tantùm verbis complecti, ſed etiam

*oculis ſubiicere,& veluti manu docere oportet. Quadrati igitur nota erit hec,*q.

Secundus Creatorũ,eſt Cubus:qui fit ex Radice in ſe, & quadrati in eandem. Vt 2 in 2 faciunt 4:& 4 in 2 faciunt 8,Cubũ. Huius nota,erit ꝗ.

*Tertius,eſt Quadrati quadratus,quem nos Biquadratum dicemus: vulgò Cenſicenſicum appellãt. Fit ex Radice in ſeipſam, tum ex quadrato rurſus in ſe. Vt 2 in 2 faciunt 4:tum 4 in ſe faciunt 16, Biquadratum. Quod ſi gradatim multiplicationes ex Radice ſpectemus,ſic creabitur:2 in ſe faciunt 4: tum 4 in 2 faciunt 8:ac tertiò 8 in 2 faciunt 16. Hunc ſic notabimus,*qq.

Quartus,eſt Superſolidus,quod Relatum primum vulgò vocant:in quo quaternaria fit multiplicatio. Vt 2 in 2,tum in 4,tertiò in 8,atque vltimò in 16,faciũt 32,numerum Superſolidum. Huius nota,eſt ß.

Quintus,eſt Quadraticubicus,Cenſicubicum vulgò dicũt:éſtque,ex ipſa vocabuli ratione,quadratus cubicè multiplicatus. Per Radicem verò quinque fiũt multiplicationes: quarũ vltima eſt 32 in 2,fiũt 64,numerus Quadraticubicus. Huius nota,eſt qꝗ.

Sextus,eſt Superſolidus ſecundus,quod ſecundũ Relatum vocant. Fit ex ſenaria multiplicatione, nempe ex 64 in 2, fiunt 128,Superſolidus ſecundus. Cuius nota,eſt bß. Ac ſic multiplicata continenter Radice,creabuntur numeri:quorum appellatio aſpera eſt,vſus nullus:niſi quòd ex iis ſpeculamur ſeriem Numerorum admirabilem:vt neſcias vtrum magis natura an ars infinita ſit. Harum enim radicum inuẽtio arte conſtat,in infinitum.

DE

DE NVMERORVM CREAtorum ſitu & progreſſu.

CAP. II.

OMnis Progreſsio Geometrica,ſi ab Vno ducatur, ſpecies numerorum Creatorū,ſeu, vt dicunt, Radicaliū ordinatim complectitur. Secundus quippe Progreſsionis numerus,radix eſt cæterorū (Vnū vero ſui ipſius radix & creatio eſt)tertius eiuſdē Progreſsionis numerus,eſt Quadratus:quartus, Cubus : quintus, Biquadratus:ſextus , Superſolidus: ſicque infinitè. Quod nos ex dupla Progreſsione manifeſtū faciemus:ſimul Progreſsio numerorum naturalis quomodo cum progreſsione Geometrica conueniat docebimus,hac ſubſcriptione.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	R	q	ce	qq	ß	qce	bß	qqq	cece	qß
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

11	12	13	14	15	16
cß	qqce	dß	qbß	ceß	qqqq
2048	4096	8192	16384	32768	65536

Primus ordo, eſt numerorum naturali ſerie progredientium, quos Exponentes vocabimus,quòd medij ordinis notas exponāt. Medius ordo,eſt ſignorum ſeu notarum,quibus numerorum radices,aut numeri ipſi Creati figurari ſolent. Tertius, eſt numerorum geometricè procedentium.

Igitur Vnitas medij ordinis,quum ſimpliciſsima ſit,numerum nudum ac ſimplicem repræſentat:ob id, nullo Exponēte inſcribitur, præterquā o , *ſeu Nihilo: & ipſa ſibi ſubiicitur tertio*

ordine: vt intelligamus perpetuò vnũ eſſe & omnia: ſcilicet Radicem, Quadratum, Cubum, Biquadratum, & ſic deinceps. Nota verò ℞, quum ſit omnium, vt ſic dicam, anteſignana, ſupra ſe habet Vnum: infra ſe Binarium, qui cæterorum eſt radix. Et Lineam refert. Deinceps Quadratum (q) habet Binarium Exponentem, ac ſibi ſubiectum Quadratum numerum, 4. Et Superficiem repræſentat. Cubus, Ternarium habet Exponentem: Cubum verò 8 ſibi ſubiectum. Et Solidum ſeu Corpus deſignat. Biquadratum (qq) habet Quaternarium Exponẽtem. Sed quia nihil in rerum natura ſupra corpus exiſtit, nihil habet quod referat: tantùm ad progreſſum infinitatis, vt cæteri, deinceps ordine collocatur. Qui igitur tertiò ſunt poſitu, omnes Creati, ſeu, vt dicitur, Radicales ſunt: eamque habent appellationem quam ſigna medij ordinis, quibus inſcribuntur, oſtendunt.

Inter numeros autem primi ordinis Additio & Subtractio reſpondent Multiplicationi & Diuiſioni Numerorũ tertij ordinis. Nam quemadmodum ex additione 4 ad 6 ex primo ordine, fiunt 10: ita ex multiplicatione 16 in 64 tertij ordinis, fiunt 1024, Numerus qui decimum locũ obtinet, ſcilicet ſub hac nota qß. Contrà, quemadmodum ex ſubtractione 4 à 6, ſuperſunt 2: ita ex diuiſione 64 per 14, exeunt 4, numerus ſub nota q repoſitus. Reliquorum eadem ratio.

DE INVENIENDIS NOTIS AD Exponẽtes numeros pertinẽtibus, & è diuerſo.

CAP. III.

Reſolue Exponentem Numerum in ſuas partes incompoſitas (eæ ſunt, quæ, quum ſolo Vno diuidantur, ex earundem inter ſe multiplicatione Numerus ipſe Exponens conſurgit) tum notas ad harũ

partium vnamquanque pertinentes ſimul iunge: habebis ſignum compoſitum Exponentis propoſiti. Vt, ſi quæratur quod ſignum ad hunc Exponentem, 24, pertineat: reſolue 24 in ſuas partes incompoſitas: ſcilicet in 2, 2, 2, 3: (nam 2 in 2 efficiunt 4: deinde 4 in 2 efficiunt 8: tertiò 8 in 3 faciunt 24) harum partium notæ ſimul iunctæ, videlicet q, q, q, α, *conſtituunt* qqqα, *ſignũ vigeſimiquarti loci. Sic* 100 *(cuius partes incompoſitæ, ſunt* 2, 2, 5, 5 *) ſignum habet hoc,* qqßß. *Hæc ex Stifelio. Idem verò expeditius conficietur, hac ratione. Animaduerte duos pluréſve numeros, ex quorum multiplicatione Exponens numerus conflatur. Eorum notas ſimul iunge: habebis ſignum ipſius Exponentis. Vt,* 24 *exurgũt ex* 12 *ductis in* 2: *quorum notæ ſunt,* q *&* qqα: *quæ iunctæ faciunt* qqqα. *Idem prõueniet, ſi notas Exponentium* 3 *&* 8 *(ex quorum multiplicatione exurgunt* 24*) ſimul iunxeris, aut notas Exponentium* 4 *&* 6. *In numeris autem grandioribus, vt in* 100, *duplici opere id efficies, aut triplici. Scilicet, quia* 100 *emergunt ex ductu* 20 *in* 5: *prius inquires ſignum* 20 *ex* 4 *&* 5: *id erit* qqß: *rurſus ſignum* 5 *eſt* ß: *hæc iuncta faciunt* qqßß, *ſignum centeſimi loci. Quòd ſi Exponẽs ſit numerus Primus, tantùm obſerua quotus ſit ordine à Quinario inter numeros Primos. Nota enim Exponẽtis* 7, *qui eſt proximus Primorũ à Quinario, eſt* bß, *ſicut ex triplici ordine perſpicitur. Nota* 11, *erit* cß: 13, dß: 17, eß. *ſicque in reliquos.*

Ordo Exponentium & Signorum Compoſitorum.

4	6	8	9	10	12	14	15	16
qq.	qα.	qqq.	αα.	qß.	qqα.	qbß.	αß.	qqqq.

18	20	21	22	24	
qαα.	qqß.	αbq̆.	qcß.	qqqα.	*ac ſic deinceps.*

Ordo Exponentium & Signorum incompoſitorum.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
q.	ce.	ß.	bß.	cß.	dß.	eß.	fß.	gß.	hß.	iß.	kß.&c.

(Horum Superſolidorum ordinem elementis alphabeticis deſignamus, ne notæ Arithmeticæ cæteros numeros conturbent.)

E contrario, Signa ad proprios Exponentes ſic reducũtur. Singulis notis incompoſitis ſingulos Exponentes tribue. Hos inter ſe multiplica, exurget Exponens quæſitus. Vt huius ſigni qqqce, Exponentes ſimplices, ſunt 2,2,2,3: qui inter ſe multiplicati, ſicut paulò antè docuimus, efficiant 24, Exponentem huius Signi qqqce. Sed hæc artis demõſtrationẽ magis quàm vſum exhibẽt.

DE NVMERIS SPECIATIM AD Algebræ calculum ſpectantibus.

CAP. IIII.

ALgebra, præter Abſolutos numeros (Abſolutos dicimus, qui per ſe ſine ſigno conſiderantur: cuiuſmodi ſunt ij, quibus vtitur prima Arithmetica) triplicem numerorum ſpeciem ſibi aſſumit. Prima, eſt eorum qui numero abſoluto & ſigno poſtpoſito conſtant. Vt 2 ℞, duæ ℞: 3 q, tria Quadrata: 4 ce, quatuor Cubi. Denominatos ſatis aptè quidam vocauerunt: barbarè autem Coſſicos, ab Italis qui Algebram, Coſam dicunt.

Altera ſpecies, eſt eorum qui ſignum habent præpoſitum: qui peculiari nomine Irrationales dicũtur, vulgò Surdi. Vt √q20, id eſt, Radix quadrata viginti: quæ quidem nulla eſt, quum nullus ſit numerus, qui in ſe ductus producat 20. Eius generis ſunt √ce

32: √qq45, omnes denique quorum abſoluta particula, ea radice caret quam ſignum refert. Nam √q25, numerus eſt Rationalis, ſcilicet 5.

Tertia ſpecies, eſt Denominatorum Irrationalium, in quibus numerus abſolutus inter duo ſigna medius eſt. Vt √q 8cc: hoc eſt, Radix quadrata 8 Cuborũ: & √cc 4qcc, Radix Cubica 4 Quadraticubicorũ. Atque eæ tres ſpecies ſua habent præcepta Additionis, Subtractionis, Multiplicationis & Diuiſionis, cæterarũque Regularum, non ſecus quàm abſoluti numeri: quas nos facili methodo explicabimus: hoc quippe Libro, primam: altero, duas poſteriores.

DE ADDITIONE ET SVBtractione Denominatorum.

CAP. V.

QVum ſigna fuerint diuerſa, fit Additio per ſignũ Pluris interpoſitum: Subtractio verò, per ſignum Minoris. Vt 4q ad 5cc additi, faciunt 4q p.5cc. Econtrario 4q à 5cc ſubtracti, relinquunt 5cc m. 4q. Sicque è ſimplicibus fiunt Compoſiti ſeu duplices: quos ſuo loco tractabimus.

Quum verò ſigna fuerint eadem; iunge abſolutos Numeros, producto adde ſignum commune: fiet Additio. Cõtrà in Subductione, minorem abſolutorum à maiori ſubtrahe, relicto ſigno communi. Vt 3q ad 5q additi, faciũt 8q. Sed 3q à 5q ſubtracti, relinquunt 2q: non aliter quàm 3 Aurei cum 5 Aureis, faciunt 8 Aureos: & 3 Aurei à 5 Aureis ablati, relinquunt 2 Aureos.

DE MVLTIPLICATIONE & Diuiſionę Denǫminatorum.

CAP. VI.

AD Multiplicationem, Numeros abſolutos inter ſe multiplica: Signa verò adde, pro Exponẽtium ratione. Ad Diuiſionẽ, partire abſolutũ numerum Diuidendi per abſolutum Diuiſorꝭ: Signum verò alterum ab altero ſubtrahe.

Exemplum Multiplicationis. Sint ducẽdæ 5 ℞ in 4 q: Duco 5 in 4, fiunt 20: Iungo q cum ℞, fit ce: nam Exponens q, eſt 2: & Exponens ℞, eſt 1: quæ addita, faciunt 3, Exponentem Cubi.

Item 5 ℞ per 4 q multiplicatæ, faciunt 20 ce. Item 4 ce per 6 q multiplicati, faciunt 24 ß.

Exemplum Diuiſionis. Volo diuidere 20 per 4 q: Diuido 20 per 4, exeunt 5: & aufero q à ce, nempe 2 à 3: manet 1, Exponẽs Radicis. Quare 20 ce per 4 q diuiſi, producunt 5 ℞. Item 8 ℞ per 2 diuiſæ, producunt 4 ℞. Sed 2 ℞ per 4 diuiſæ producunt $\frac{2}{4}$ ℞, ſeu $\frac{1}{2}$ ℞: hoc eſt, dimidiam Radicem.

Si fortè Numerus Signi minoris per numerum maioris diuidẽdus ſit: ſtatuitur Diuiſor ſub Diuidẽdo, interiecta lineola, ſicut in abſolutis fieri ſolet. Vt 8 q per 2 q ce diuiſi, faciũt $\frac{8q}{2qce}$. Fitq́ue fractio: quæ ad minimam denominationem reducitur, vt in Fractu docebimus.

DE

DE MVLTIPLICATIONE DEnominatorum Quadrata, Cubica, & reliquis: déque eorum Radice capienda.

CAP. VII.

AD multiplicationem Quadratam, duc numerum in ſe, ſignum verò duplica. Vt 2℞ in ſe quadratè, faciunt 4q. Item 2q in ſe quadratè, faciunt 4qq: Item 2c in ſe quadratè, faciunt 4qc.

Ad multiplicationem Cubicam, duc numerum in ſe cubicè, ſignum verò triplica. Vt 2℞ in ſe cubicè, faciunt 8c: Item 2q cubicè, faciunt 8qc.

Ad Biquadratam, multiplica abſolutum biquadratè: ſignum quadruplica. Vt 2℞ in ſe biquadratè, faciunt 16qq: & 2q biquadratè, faciunt 16qqq.

Hinc colligitur Radicis capiendæ ratio. Scilicet ad Quadratam extractionem, ex abſoluto numero educ Radicem: ex ſigno verò ſume dimidium. Vt Radix Quadrata 4q, eſt 2℞: Radix quadrata 16qq, eſt 4q. Et Radix quadrata 4qc, eſt 2c. Oportet igitur numerum abſolutum eſſe Quadratum, & Exponentem Signi eiuſmodi eſſe qui per binarium diuidi poſſit.

Ad extractionem Cubicam, ex abſoluto ſume Radicem Cubicam: ex ſigno verò tertiam partem. Vt Radix Cubica 8c, eſt 2℞: Radix Cubica 64qc, eſt 4q.

Denique in omni Extractione oportet tam numerum abſolutum, quàm characterem ad Radicis ipſius naturam eſſe accommodatos. Etenim 16c neque Radicem quadratam habent, neque Cubicam: Etenim quanuis 16, Quadratus ſit Numerus: tamen ſignum c nullum habet dimidium: Rurſus quanuis c

per tria diuidatur, tamen 16 nullam habent Radicem Cubicam. Sed eiuſmodi Numeri ſuas habent Radices Irrationales, de quibus ſecundo volumine præcipiemus.

DE NVMERIS DENOMINATIS, Compoſitis, & Diminutis: ac de ipſorum Additione & Subtractione.

CAP. VIII.

Denominati Compoſiti dicuntur, quorũ partes ſigno Pluris intercipiũtur. Vt 6q p.3℞. Diminuti ſunt, quorum partes ſigno Minoris connectũtur. Vt 6q m.3℞. Quæ duæ ſpecies quoniam promiſcuè in ſupputationem cadunt, vt que ſola nota poſitionis aut priuationis diſcrepent, vna etiam opera à nobis tractabuntur.

Additio & Subtractio Signorum ſimilium.

In Additione, Signa eadem idem Signum ponunt: In Subtractione, Signa eadem idem Signum relinquunt: niſi quum maior particula occurrit in Subducendo Numero. Tunc enim ab hac ſubtrahitur minor: & pro Pluri reponitur Minus: pro Minore verò, Plus.

Exempla Additionis eorundem Signorum.

5℞ p.4	5q m.4℞
4℞ p.3	4q m.3℞
9℞ p.4.	9q m.7℞.

Exempla

Exempla Subtractionis eorundem Signorum.

8℞ p.6	8q m.6℞
3℞ p.2	5q m.2℞
5℞ p.4.	3q m.4℞.

Exempla Exceptionis.

6ce p.8℞	6ce m.8℞
2ce p.10℞	2ce m.10℞
4ce m.2℞.	.4ce p.2℞.

In horum vtroque ſubtrahuntur 8 à 10: & in priore pro Pluri reponitur m. in poſteriore verò, pro Minori retinetur Plus.

Additio & Subtractio Signorum diuerſorum.

Diuerſa Signa pro Additione, Subtractionem: & pro Subtractione, Additionem faciunt: Et in Additione retinetur Signum maioris Numeri: In Subtractione verò, Signum eius Numeri à quo fit Subtractio.

Exempla Additionis Signorum diuerſorum.

6q p.8℞	6q m.8℞
2q m.2℞	12q m.3℞
8q m.2℞	3q p.4℞.

Exempla Subtractionis Signorum diuerſorum.

8q p.6℞	8℞ p.0	8q m.3℞
2q m.10℞	12℞ m.24	9℞ m.2q
6q p.16℞	24 m.4℞	10q m.12℞

Vides vt in media formula adduntur 24 ad 0, manéntque 24, quæ notantur ſigno Pluris, propter p.0 quod eſt in ea ſede à qua fit Subtractio: Nam ſubtrahere m.24, eſt addere 24. Atque ob eãdem cauſam, in vltima formula fiunt 10q m.12℞. In illa verò altera ſubtrahũtur 8℞ à 12℞: manétque m.4℞. Sed hoc nil aliud eſt quàm ſubtrahere 12 ab 8. Et quoniã ab 8 aufertur plus quàm 8, neceſſe eſt manere minus quippiam quàm 8: ſcilicet tãto minus, quanto 12 ſuperant 8.

Aliud Exemplum Subtractionis.

6 p. 2℞	*In hac poſtrema formula ſubtraho 6 à 15:*
15 m.3℞	*manent 9, cum ſigno m. atque addo 3℞ ad*
5℞ m. 9	*2℞, fiunt 5℞ cum ſigno Pluris.*

DE MVLTIPLICATIONE & Diuiſione Denominatorum Compoſitorum & Diminutorum.

CAP IX.

Eadem Signa inter ſe multiplicata aut diuiſa, producunt Plus: diuerſa, Minus.

In Multiplicatione, ſingulæ particulæ in ſingulas ducuntur. Vt, Sint multiplicandæ 6℞ m.2 per 5℞ m.3.

6℞ m.2	*Duco 6℞ in 5℞, fiunt 30q: tũ m.2 in m.*
5℞ m.3.	*3, fiunt p. 6: Rurſus m.2 in 5℞, proueniũt*
30q p.6	*m.10℞: demũ 6℞ in m.3, fiũt 18℞: quæ*
m.28℞.	*cũ 10℞, faciũt 28 ℞, vt vides in formula.*

Alterum

Alterum Exemplum.

6q p.8℞ m.6
2q m.3
―――――――――
12qq p.16∝ m.12q
m.18q p.24℞ p.18.

Diuiſionis Exempla.

Sint diuidenda 30q m.58℞ p.24 per 5℞ m.3. Erit poſitio, duplici opere, ad hunc modum,

40
30q m.58℞ p.24
5℞ m.3. (6℞
―――
30q m.18℞

Scilicet 5 in 30 continentur ſexies, & 3 in 58 toties, eóque amplius. Pono 6 ad numerum Indicantem, ſeu Quotientem, cum nota ℞: Nam ℞ à q ablata, relinquit ℞. Tum per 6℞ multiplico totum Diuiſorem, proueniunt 30q m.18℞: quibus ablatis à 30q m.58℞, relinquitur m.40℞. Inde transfero Diuiſorem. Vbi 5℞ per m.40℞ diuiſæ, indicant m. 8: aſſcribo m.8 ad Indicãtem poſt 6℞: ac

30q m.58℞ p.24
5℞ m.3 (6℞.m.8.
―――
40℞ p.24.

multiplico totum Diuiſorem per m.8. proueniunt m.40℞ p.24: quæ ablata à ſuperioribus, nihil relinquunt.

In Diuiſione autem id obſeruandum vt Signa continenter ſtatuantur: ſcilicet vt nullum intermittatur.

Veluti, ſi diuidamus 1∝ p.1. per 1℞ p.1: non ſtabit poſitio eiuſ-

modi, vt 1℞ p.1 ſtatuatur ſub 1ℭ p.1: Neque erit Indicans Numerus 1q *p.1: ſed* 1q *m.1℞ p.1: ſicut appoſitum vides.*

*m.*1q		*Scilicet inquiro quomodo cõtineatur* 1℞ *in* 1ℭ: *& fit Indicans,* 1q (*nam*
1ℭ *p.*ϕq *p.*0℞ *p.*1.	(1q.	
1℞ *p.*1.		
1ℭ *p.*1q		

ſignum ℞ *à* ℭ *ablatum, relinquit* q)*: per* 1q *multiplico* 1℞ *p.*1*: fit* 1ℭ *p.*1q*. Aufero* 1ℭ *p.*1q *ab* 1ℭ *p.*0q *p.* 0℞ *p.*1 *: ſuperſunt m.*1q *p.*0℞ *p.*1*. Iam transfero Diuiſorem: Vbi* 1℞ *p.*1*. ſic continentur in m.* 1q *p.* 0℞*, vt indicent m.* 1℞*. Per m.* 1℞ *multiplico Diuiſorem, prouenit m.*1q *m* 1℞*: hoc aufero à m.*1q *p.*0℞*: ſuperſunt ex toto Diuidendo p.*1℞ *p.*1*. Tandem tranſlato Diuiſore,* 1℞ *p.*1 *in* 1℞ *p.* 1 *indicat* 1*: ac peracta Subtractione, nihil reſtat.*

*m.*1q 1℞	
1ℭ *p.*0q *p.*0℞ *p.*1	
1℞ *p.*	(1q *m.*1℞.
m. 1 *m.* 1℞	

1q 1℞	
1ℭ *p.*ϕq *p.*ϕ℞ *p.*1	
1℞ *p.*1	(1q *m* 1℞ *p.*1.

DE MINVTIIS SEV FRAGmentis Denominatorum.

CAP. X.

IN *Denominatorum Minutiis non alia eſt quàm in Numeris abſolutis traditio: adhibitis iis quæ modò de Intégris docuimus. Quare ſola Exempla inſtructionis vice erunt.*

Addi-

Additio.

Sint addendæ $\frac{4\text{℞}}{3}$ *ad* $\frac{5q}{4q}$ *Reduco primùm ad eandem denominationem, ut hic aſcriptum uides: Ex reductione fiunt* $\frac{16qq}{12q}$ *&* $\frac{15q}{12q}$*: Hæc addita faciunt* $\frac{16qq\ p\ 15q}{12q}$*, quæ ſic enunciantur, 16 Biquadrata p. 15 Quadrata diuiſa per 12 Cubos.*

$\frac{4\text{℞}}{3}$ $\frac{5q}{4q}$

$\frac{16qq}{12q}$ $\frac{15q}{12q}$

Subtractio.

Sint 4℞ ſubtrahendæ à $\frac{16qq\ p\ 15q}{12q}$*. Reduco ad eandem Denominationem, proueniunt* $\frac{48qq}{36q}$ *&* $\frac{48qq\ p\ 45q}{36q}$*. Iam aufero* $\frac{48qq}{36q}$ *à* $\frac{48qq\ p\ 45q}{36q}$ *ſuperſunt* $\frac{45q}{36q}$*, hoc eſt,* $\frac{5q}{4q}$*: ut patet ex Abſolutorũ doctrina.*

Multiplicatio.

Sint multiplicanda $\frac{16qq\ p\ 15q}{12q}$ *per* $\frac{4\text{℞}}{3}$ *: proueniunt* $\frac{64ß\ p\ 60q}{36q}$*, Hoc eſt,* $\frac{16ß\ p\ 15q}{9q}$.

Diuiſio.

Sint diuidẽda $\frac{16ß\ p\ 15q}{9q}$ *per* $\frac{4\text{℞}}{3}$ *exeũt* $\frac{48ß\ p\ 45q}{36qq}$*: hoc eſt,* $\frac{16ß\ p\ 15q}{12qq}$.

DE ÆQVATIONE.

CAP. XI.

IN Æquatione & Radicũ extractione artis ſumma conſiſtit. Proinde utranque quàm poterimus clariſſimè explicabimus: ut totam Algebram ad unum ſcopum dirigamus. In quo etiam Stifelius ſedulam nauauit operam.

Æquatio itaque, eſt duorum Numerorum diuerſè denomi-

natorum ad vnam æſtimationem reductio. Veluti quum dicimus 1 Aureum valere 48 Aſſes, fit æquatio inter 1 cum ſua Aurei denominatione, & 48 quæ ab Aſſe denominantur. Ita quum dicimus 1q æquare 4 ℞, æquatio fit inter Vnitatem per Quadratum denominatam, & 4, quæ à Radice denominantur. Si igitur 1q valeat 16: ipſas 4 ℞ itidem valere 16 neceſſe eſt.

Atque vt rem manifeſtiorem faciamus, hoc proponemus Exemplum,

Quæritur Numerus à quo tertia & quarta pars ablatæ, relinquant 10. Primùm omnium, nemo eſt qui neſciat, Numeros qui in Quæſtionibus exiſtunt, eos eſſe per quos ratiocinamur, vt latentes Numeros exprimamus. Quapropter ad hanc Quæſtionem explicandam, Denarium ducem eſſe conuenit: in quo ſi eſſet perſpectum Denarius ipſe quotam partem Numeri latentis quem quærimus, conſtituat: is ipſe Numerus ilicò innoteſceret. Nam ſi compertum habeam, verbi cauſa, Senarium eſſe duas tertias Numeri cuiuſpiam mihi incogniti: ſanè diuiſo Senario per $\frac{2}{3}$, ſtatim eum numerum obtinebo, nempe 9. Quæſtio itaque noſtra ſic exercenda eſt, vt ratiocinando perquiramus de Denario, quota pars eſſe poſſit Numeri illius latentis. Ars igitur ea eſt.

Pro Numero incognito pono 1 ℞: ſcilicet fingo 1 ℞ æqualem eſſe ipſi Numero quem quæro. Tum ſic rationem ineo. Tertia pars 1 ℞, eſt $\frac{1}{3}$ ℞: quarta itē eiuſdē, eſt $\frac{1}{4}$ ℞: Hæ partes ab 1 ℞ ablatæ, relinquūt $\frac{5}{12}$ ℞. Ergo quemadmodum 1 ℞ æqualis eſt Numero ignoto, ſic $\frac{1}{3}$ ℞ eſt æqualis tertiæ parti ipſius Numeri: & $\frac{1}{4}$ ℞ eſt æqualis quartæ eiuſdem parti. Quum itaque ab ℞ abſtulero $\frac{1}{3}$ ℞ & $\frac{1}{4}$ ℞, atque item à Numero ignoto intellexero auferri triētem & quadrātem, ſecundùm Quæſtionis ſententiā erunt, ex communi animi Notione, duo vtrinque reſidua æqualia. Hæc autē reſidua, ſunt $\frac{5}{12}$ ℞, & 10. Quapropter erūt $\frac{5}{12}$ ℞ & 10 inter ſe æqualia. Atque ea eſt æquatio inuenta. Nā ſicut $\frac{5}{12}$ ℞ exhibent quinque duodecimas Radicis, quam poſui æqualem Numero inue-

ro inueniendo: ita denarius reſiduus, quinque duodecimas numeri ipſius inueniendi conſtituit. Quare diuiſis 10 per $\frac{5}{12}$, numerum ſigno ℞ antepoſitum, exibunt 24: atque is erit Numerus qui quærebatur. Probatio. Tertia pars 24, eſt 8: quarta eiuſdem, eſt 6: quas ſi à 24 dempſerimus, relinquentur 10, ſicut in Quæſtione fuit conſtitutum.

Vides hoc totum pendere à communi illa ſententia, Si ab æqualibus æqualia auferantur, quæ relinquuntur erunt æqualia. Diuiſio autem id perficit, nempe Regula illa laudatiſsima quatuor quantitatum, quam vulgò Regulam Trium vocant.

Quæret fortaſſe quiſpiam quánam ratione hæc Regula Trium in hunc locum inducatur: & quam collocationem habeant Numeri. Nimirum ſic ſtant Numeri ad Regulã, $\frac{5}{12}$ ℞ dant 10, quãtum dat 1 ℞? Multiplico 1 ℞ per 10, fiunt 10 ℞: Diuido 10 ℞ per $\frac{5}{12}$ ℞, exeunt 24.

Altero Exemplo ſtudioſos veluti manu docebimus. Alexander Magnus, quum aliquando Caliſthenem Philoſophum in familiare colloquium adhibuiſſet, atque in ætatum mentionem, vt fit, incidiſſet: Ego, inquit, Epheſtionem duobus annis anteeo: Clytus noſtram amborum ætatem quatuor annis ſuperat: Cui Caliſthenes, Cõmode, inquit, ô Rex, mihi iſthæc annorum collatio memoriam refert patris mei: qui quum nonageſimum ſextum attigerit annum, tres veſtrûm, dum vixit, ætates compleuit. Quæritur quotum ætatis ſuæ annum ageret Alexander, tum Epheſtion & Clytus.

Pro annis Epheſtionis qui minimus natu fuit, pono 1 ℞: Erúntque anni Alexandri, 1 ℞ p. 2: Clyti verò, 1 ℞ p. 6: Quorum ſumma, nempe 4 ℞ p. 8. erit æqualis 96. Quod antè quàm abſoluamus, de Tranſpoſitione, quæ AEquationi interuenit, quædã neceſſaria præcipiemus.

C

DE TRANSPOSITIONE PARticularum AEquationis, Signorúmque Pluris & Minoris.

CAP. XII.

Omnis AEquatio ſic eſt inſtituenda, vt Numerus Denominatus, ſi vnicus fuerit (cuiuſmodi in vltimo Exẽplo, 4 ℞) ſeparatim ac per ſe reliquis AEquationis particulis æquetur: aut ſi fortè plures Denominati fuerint, qui maximæ erit denominationis ſolus reliquis AEquationis partibus æquiparetur. Quod quidem per Tranſpoſitionem ſic fiet.

Signum Pluris tranſpoſitum tranſit in Minus: Contrà, Signũ Minoris tranſpoſitum, tranſit in Plus. Vt in noſtro Exemplo, 4 ℞ p.8 æquantur 96: ſic tranſponendæ ſunt partes, vt 4 ℞ ſolitariè ſtent æquales reliquo AEquationis. Scilicet aufero p.8 ex 4 ℞ p.8: ſimul eadem 8 aufero ex altera AEquationis parte, vtpote ex 96, vt conſtet æqualitas partium. Et erunt 4 ℞ æquales 88. Et iam formata eſt AEquatio: qua 4 ℞ per ſe æquantur 88. Diuido igitur 88 per 4, Numerum Radicum, proueniunt 22: Et tantundem valet 1 ℞ poſita pro annis Epheſtionis. Tres enim mihi quantitates comparaui ad Regulam Trium, 4 ℞ æquantur 88, cui æquatur 1 ℞? Duco 1 ℞ in 88, fiunt 88 ℞: has diuido per 4 ℞, exeunt 22, pro annis Epheſtionis. Erunt igitur anni Alexandri, 24 (nempe 2 ſupra Epheſtionis annos) Ii iuncti, faciunt 46. Quare Clytus annos habuit 50: ſcilicet 4 ſupra amborum ætatem.

Aliter poterimus ratiocinationem inire. Pro annis Alexandri, pono 1 ℞: Et erunt Epheſtionis anni, 1 ℞ m.2: Clyti verò, 1 ℞ p.2: Hæc addo, fiunt 4 ℞, æquales 96 (nam p.2 & m.2 ſe mutuò perimunt) Quare erit 1 ℞, 24, numerus annorum Alexandri, vt

priùs

prius. Atque hinc cæterorum anni colligentur, ex præſcripto Quæ-ſtionis.

Hoc loco obiter monebimus quonam pacto Numeri Rebus, & è diuerſo, Res Numeris accõmodentur. Verbi gratia, Prior no-ſtrarum Quæſtionum, quæ de Numero proponit, ſic inſtitui po-terat,

Mercator, tertiam partem Aureorum quos habuit, frumento emendo, quartam vino inſumpſit. Confecta emptione, aureos re-liquos 10 habuit. Quæritur Aureorum ſumma. Altera autem Quæſtio ad Numeros reuocabitur in hæc verba,

Quæruntur tres Numeri, quorum primus ſecundum binario ſuperat: tertius verò ambos quaternario: atque ij tres ſimul poſiti efficiunt 96. Id enim Mathematicis familiare eſt, vt Quæſtio-nes ad ſpecies Numerorum accommodent: quæ poſtea ad rerum tractationem vſúmque conuertuntur.

Alia Tranſpoſitionis Exempla.

Sint 6 ℞ æquales 12 ℞ m. 24. Vtrinque aufero 6 ℞: Tum 6 ℞ m. 24 æquantur 0 ſeu nihilo: vt neceſſe ſit 6 ℞ & 24 ſimul æquari, quum 6 ℞ & 24 ſe mutuò tollant. Vel, tranſpo-no 24: fient 12 ℞, æquales 6 ℞ p. 24 (mutatur enim p. in m.) Vtrinque aufero 6 ℞, manebunt 6 ℞, æquales 24, vt priùs.

Item, Sint 6 ℞ p. 4 æquales 12 ℞ m. 20. Aufero vtrinque 6 ℞: manent 6 ℞ m. 20, æqualia 4: hæc m. 4 ſi tranſtuleris, fient 6 ℞ æquales 24.

Item, Sint 8 ℞ m. 10 æquales 12 ℞ m. 26. Tranſpono m. 10, fiunt 8 ℞ æquales 12 ℞ m. 16. Deinde ablatis vtrinque 8 ℞, ma-nebunt 4 ℞ æquales 16. Vel tranſpono 26: fient 12 ℞ æqua-les 8 ℞ p. 16. Tum ablatis vtrinque 8 ℞, manebunt, vt modò, 4 ℞ æquales 16.

Præterea ſi ex Queſtionis cuiuſpiam deductione occurrerit huiuſmodi Æquatio, 1q p. 6 m. 1℞ æqualia 4℞ p. 2: tunc ſic fiet tranſpoſitio, 1q m. 1℞, æquale 4℞ m. 4: inde 1q æquale 5 4℞ m. 4.

Ad ſummam, Æquatio ſic erit componenda, vt Radices ſolæ æquentur Numero: Quadrata ſolà, Radicibus & Numero: denique Cubi ſoli, ſi incidant, Quadratis, Radicibus & Numero, pro Quæſtionis propoſito & deductione.

DE REDVCTIONE AD minimam Denominationem.

CAP. XIII.

Qvemadmodum in Abſolutorum fragmentis, Numerator & Denominator ſecundum proportionem æſtimantur (ſcilicet $\frac{12}{15}$ tantundem notant, quantum $\frac{4}{5}$): ita in Numeris Denominatis nihil tam ſpectamus, quàm proportionem ipſam. Proinde ad ſimpliciſsimam æſtimationem reducuntur, hac ratione. Aufer ab vtraque Æquationis parte, æqualem rationem Numerorum, æqualemque Denominationem Signorum. Vt, ſi fuerint 3ce æquales 12q m. 9℞: ex Numerorum ſola reductione, erit 1ce æqualis 4℞ m. 3℞ (ſcilicet diuiduntur ſinguli Æquationis numeri, per numerum maximæ denominationis, nempe per 3): ex ſola verò ſignorum reductione, erunt 3q æqualia 12℞ m. 9: Scilicet aufero ℞ à ce, manet 3q: deinde à q aufero idem ſignum ℞: & demum idem aufero à ſeipſo: manent 12℞ m. 9. Tandem ſi vtranque reductionem feceris, erit 1q æquale 4℞ m. 3.

DE

DE REDVCENDA AEQVATIONE Minutiarum ad Æquationẽ Integrorum.

CAP. XIIII.

AEquatio Minutiarum ad Integra ſic reducetur. Multiplica Numeratorem vnius per Denominatorẽ alterius: Inter producta manebit eadem ipſa æquatio quæ fuit inter Minutias. Veluti ſi fuerint $\frac{4\,\text{℞}\,p\,18}{2\,\text{℞}}$ æqualia $\frac{12\,\text{℞}\,m\,58}{2}$, multiplica 4 ℞ p.18 per 2, fiunt 8 ℞ p.36. Deinde multiplica 12 ℞ m.58 per 1 ℞, fiunt 12 q m.58 ℞. Stabitque æquatio eadem inter 8 ℞ p.36 & 12 q m. 58 ℞, que erat inter $\frac{4\,\text{℞}\,p\,18}{2\,\text{℞}}$ & $\frac{12\,\text{℞}\,m\,58}{2}$. Minus tædioſum erit opus ſi Denominatores tranſtuleris, vt vides in ſubiecta formula.

Item ſi fuerint 2 q m. 65 æqualia $\frac{4\,\text{℞}\,p\,60}{2\,\text{℞}}$, erit poſitio in hunc modum, tranſlatis Denominatoribus,

$\frac{4\,\text{℞}\,p\,18}{2}$	$\frac{12\,\text{℞}\,m\,58}{1\,\text{℞}}$	$\frac{4\,\text{℞}\,p\,60}{1}$	$\frac{2\,q\,m\,65}{2\,\text{℞}}$
8 ℞ p.36	12 q m.58 ℞.	4 ℞ p. 60	4 c m.130 ℞.

Huius autem Reductionis ratio hæc eſt, quòd quum Minutiæ decuſſatim multiplicantur, ſcilicet quum eoſdem Denominatores acquirunt: eadem exurgit proportio inter Numeratores, quæ inter Minutias ipſas. Quo fit, vt quum duæ Minutiæ æquales fuerint, tam Numeratores quàm Denominatores æquales euadant. Quum itaque ſolam proportionem ſpectemus, ea nobis abũde ſatisfaciet quæ eſt inter Numeratores. Proinde Denominatores abiiciuntur tanquam otioſi.

Compendium.

Si fractio Abſolutorũ occurrat æqualis fractioni Signatorum, duc Numeratorem abſolutum in Denominatorem ſignatum: productum diuide per Denominatorem abſolutum: Numerus Indi-

cans, æqualis erit Numeratori ſignato. Vt, Si $1\frac{13}{36}$ ℞ *æquantur* $4\frac{5}{6}$, *id eſt, Si* $\frac{49}{36}$ ℞ *æquantur* $\frac{29}{6}$, *duc* 29 *in* 36, *fiunt* 1044: *diuide* 1044, *per* 6, *exibunt* 174, *quibus æquales erunt* 49 ℞.

DE RADICVM EXTRACTIONE ex Denominatis Compoſitis, & Diminutis.

CAP. XV.

Q*Vum extrahenda fuerit Radix ex Compoſito aut Diminuto, vide imprimis an ſignũ Pluris particulam abſolutam afficiat, vt in hoc Diminuto*, 54 *m.* 3 ℞: *an particulam ſignatam, vt in hoc*, 20 ℞ *m.* 96 (*In Compoſitis autem vtranque afficit*) *Tum ad Radicu inuentionem ſic commentare.*

I. *Dimidium Numeri Radicum vnà cũ ſigno Pluris aut Minoris ſepoſitum, ſerua:*

II. *Huius dimidij quadratum adde ad Numerum abſolutum, ſi ipſe fuerit ſigno Pluris affectus: vel aufer minorem à maiori, ſi ſigno Minoris fuerit notatus.*

III. *Huius vltimi Numeri, qui ex Additione aut Subtractione prouenit, Radicem adde ad dimidium numeri Radicum ſepoſitum, ſi fuerat ſigno Pluris affectum: ſin ſigno Minoris, aufer minorem à maiori: Productum erit Radix quæ quærebatur.*

Exemplum. Quæro Radicem huius Compoſiti Numeri, 6 ℞ *p.* 16. *Primò, dimidium Numeri Radicum, ſcilicet* 3, *ſepono cum ſuo ſigno Pluris. Deinde, huiuſce dimidij Quadratum, ſcilicet* 9, *addo ad* 16 (*nam* 16 *ſigno Pluris notantur*) *fiunt* 25. *Tertiò, Radicem* 25 (*ea eſt* 5) *addo ad dimidium Numeri Radicum ſepoſitum* (*quum & ipſum ſigno Pluris ſit notatum*) *fiunt* 8, *Radix*

dix quæſita.

Alterum Exemplum. Inuenienda eſt Radix huius Diminuti, 54 m. 3 ℞.

Dimidium numeri Radicum, 1 $\frac{1}{2}$, ſeorſum pono cum ſuo ſigno Minoris. Deinde huius quadratū, $\frac{9}{4}$, addo ad 54 (nā 54 ſigno p. notantur) fiunt 56 $\frac{1}{4}$. Tertiò, extraho Radicem ab hoc ipſo numero 56 $\frac{1}{4}$, ea eſt $\frac{15}{2}$, ſeu 7 $\frac{1}{2}$: ab hac Radice aufero dimidium numeri Radicum ſepoſitum (nam huius ſignum eſt m.) ſuperſunt. 6, Radix 54 m. 3 ℞.

Exemplum rurſus de Diminuto. Sit educenda Radix ab hoc Diminuto, 20 ℞ m. 96.

Hic animaduertendum quoſdam eſſe Numeros quorum duplex eſt Radix: eos nimirum qui numerum abſolutum habent ſigno Minoris notatum, qualis eſt numerus propoſitus, 20 ℞ m. 96.

Dimidium igitur numeri Radicum, ſcilicet 10, pono ſeorſum cum ſuo ſigno Pluris. Tum duco 10 in ſe, fiunt 100: à quibus aufero 96: ſuperſunt 4. Demum Radicem 4, ſcilicet 2, addo ad dimidium ſepoſitum, 10: fiunt 12, Radix prior propoſiti Numeri, 20 ℞ m, 96. Vel aufero 2 ab iiſdem 10: manent 8, altera eiuſdem Radix. Prior Radix, 12, ſic probatur. 20 ℞ faciunt 240 (nam 20 in 12 ducta faciunt 240) à quibus aufero 96, manent 144: quorum Radix 12. Radix vero 8, ſic. 20 ℞ valent 160: à quibus demo 96, ſuperſunt 64: quorum Radix 8. Atque eiuſmodi numeri ſemper duplicem habent Radicem. Hac tamen quæ ſequitur, exceptione.

Sit extrahēda Radix ab hoc numero, 12 ℞ m. 36. Dimidium numeri Rad. eſt 6: hæc duco in ſe, fiunt 36: qui numerus æqualis eſt alteri particularum numeri propoſiti. Qua in ſpecie vnicam habet Radicem Numeri Diminuti. Nam quum hoc loco 36 à 36 ſuſtuleris, nihil reliqui eſt, quod ad dimidium numeri Radicum addi, aut ab eodem ſubtrahi poſſit. Id verò fit, quum Numerus

ipſe abſolutus, eſt quadratus: Cuius Radix eſt ea quæ inueſtigatur. Vt in hoc Exemplo, Radix 36, eſt ipſa Rad. Numeri propoſiti, 12 m.36, nempe 6.

DE INVENIENDIS GENERAtim Radicibus Denominatorum.

CAP. XVI.

IN *Radice Quadrata, ſi abſoluta particula Compoſiti aut Diminuti fuerit numerus Quadratus: huius plerunque Radix, erit ipſa quam quærimus. Vt, ſi ſit 1q æquale 12℞ m. 36: Radix 36, eſt ipſa totius Diminuti Radix. Vel erit dimidia pars ipſius Numeri abſoluti: Vt, 1q æquale 18℞ m.32: dimidium 32, quod eſt 16, Radix eſt Diminuti 18℞ m. 32. Vel erit tertia pars Numeri ipſius abſoluti: Vt 1q æquale 2℞ p. 15: tertia pars 15 vtpote 5, eſt Radix Compoſiti, 2℞ p. 15. Et vt ſummatim dicam, conſiderandum in quas partes diuidatur abſolutus Numerus. Vt in hoc Exemplo, 1q æqualis 10℞ p. 24, licet 24 multiplices habeat partitiones: tamen rectè ratiocinanti ſeſe offerent 12 pro Radice. Nam ſi 8 ſumpſeris, colliges 10℞ eſſe 80: quibus ſi addideris 24, fient 104: qui Numerus quadratus non eſt. Nec Quadratum offendes, ſi vel 3, vel 4, vel 6 ſumpſeris: at ſi 12 delegeris, erunt 10℞, 120: quibus ſi addideris 24, fient 144, Numerus quadratus. Ad huiuſmodi autem negotium, magno erit adiumēto Tabula Numerorum Creatorum à nobis poſita ad calcem libri. Atque vt rem familiarius explicemus, quoniam 10℞ p. 24 ponitur Numerus Quadratus, neceſſe eſt in Numero abſoluto, ſcilicet in 24, latêre eum Numerū qui quæritur in Radicem: atque in ipſo abſoluto aliquot Radices definitè contineri, quæ cū 10℞ abſoluant*

ſoluant umerum Quadratum: atque eæ ſunt duæ. Nam 12 ℞ in noſtro exemplo facient 1q, nempe 144: Cuius Radix erit 12. Omnis quippe numerus Quadratus tot Radicibus completur quot Vnitates habet ipſa Radix. Vt 9, tres habet Radices: 49, ſeptem: ac ſic in reliquis.

Alias verò Radices ſuperiores ſimili iudicio inueſtigabimus. Vt ſit 1℃ æqualis 3q p.50. Scio in 50 latère ſummàm aliquam quadratorum exactè: omnis enim Cubus Quadratis conſtat. Quũ igitur in 50 nullus numerus exactè cõtineatur Quadratus, præter 25: ſtatim colligo 5 eſſe Radicem numeri propoſiti, 3q p.50.

Item ſit 1℃ æqualis 1440 p.2q: vel ſit æqualis 2016 m. 2q: quia in 1440, atque item in 2016, reperio 144 perfectè contineri: colligo Radicem eſſe 12.

Etiam in Minutiis hæc inueſtigationis methodus locum habebit. Sint enim 28 ℃ æquales 18q p. $\frac{8}{9}$. Denominator quidem Cubus non eſt: ſed tamen fractio ipſa ad $\frac{24}{27}$ reducitur, quæ tres Cubos complectuntur. Cubus igitur, eſt $\frac{8}{27}$: cuius Radix, $\frac{2}{3}$, eſt Radix quæſita.

Eodem ingenio ſi $\frac{8}{9}$ pro 2q ſumpſerimus, ſtatim eliciemus æſtimationem 1q eſſe $\frac{4}{9}$: Cuius Radix iidem $\frac{2}{3}$. Nihil enim refert vtrum Cubi Radicem perquiramus an Quadrati, dũmodò progreſſio ipſa retineatur: quum eadem ſit Radix Cubica 27, quæ eſt Quadrata 9.

Quòd ſi in particula abſoluta nulla ſit fractio, attende diligenter ad Numerum denominatum ſeu ſignatum: qui certè eiuſmodi erit, vt in Cubos aliquot diuidi poſſit. Is autem Cubus erit Denominator: In abſoluto, Numerator reperietur: veluti, 54 ℃ ſint æquales 18q p.8. Diuide 54 in ſuas partes: habebis 27, Cubũ pro Denominatore. Numerator verò erit 8. erítque $\frac{8}{27}$, Cubus ipſe: cuius Radix eſt $\frac{2}{3}$, quæ quærebatur.

Eſt & alia facilitatis via, vt particulas æquationis diuidas per Numerum maioris ſigni. Diuiſio enim Radicem deteget.

Vt ſi 54 ce æquentur 9 q p. 12 : diuide 9 q per 54 : itidem 12 per 54 : habebis Cubi æſtimationem, $\frac{9}{54}$q p. $\frac{12}{54}$: ſcilicet 1ce æqualem $\frac{1}{6}$q p. $\frac{2}{9}$. Vides Denominatorem, eſſe Quadratum. Huius ſume Radicem pro Denominatore: cui impone 2, Numeratorem: habebis $\frac{2}{3}$, Radicem.

Rurſus ſi, vt modò propoſuimus, 54 ce æquentur 18 q p. 8: Diuide 18 q & 8 per 54 : Erit 1ce æqualis $\frac{18}{54}$q p. $\frac{8}{54}$: vel æqualis $\frac{1}{3}$q p. $\frac{4}{27}$. Vbi Numerator abſoluti Numeri eſt Qradratus, Denominator verò, Cubus. Erit itaque Radix $\frac{2}{3}$. Quemadmodum ſi 8 q æqualia fuerint 2 : erit 1q æſtimatio, $\frac{2}{8}$, hoc eſt $\frac{1}{4}$: cuius Radix, eſt $\frac{1}{2}$.

Ex inſpectione autem Numeri, Radicem eſſe Numerum fractum facilè intelligemus : quum ſcilicet numerus maioris ſigni ſuperat numerum minoris numerúmque abſolutum ſimul ſumptos. Vt in poſtremo Exemplo, 54ce æquales 18 q p. 8. Vides 54 plus eſſe quàm 18 & 8. Atque huius rei ratio eſt, quòd Minutiæ quadratæ aut Cubicæ ſemper minùs valent quàm Radices. Scilicet $\frac{4}{9}$ minus ſunt quàm $\frac{2}{3}$. Minutiæ quippe multiplicatæ, maiores quidem Denominatores producunt, ſed minorem æſtimationem. Breuiter, fractiones multiplicare, eſt minutos Numeros minutiores facere.

Hæc de Radicibus inueniendis prolixiùs docui, vt ingenia diſcentium ad ſpeculandum excitarem. Licet enim eiuſmodi deductiones, præter id quòd Numeros abſolutos duntaxat complectuntur, iis minimè ſatisfaciant, qui in demonſtrationibus fortuitis nõ conquieſcunt: eæ tamen in arte, locum exercitationis aliquem habent, dum ſummus ille Matheſeos autor, maius aliquid generauerit in animis hominum. Ex ipſis enim venamur æſtimationem Cubi æqualis Radicibus & Numero: Cubi & Radicum æqualiũ Numero: imò Cubi æqualis Quadratis & Radicibus: Cubi æqualis Quadratis, Radicibus & Numero. Quorum artem nemo adhuc (quòd ſciam) perueſtigauit: arduum opus & diuini planè

fauoris. Nos verò pro noſtra parte in tam plauſibili ſtudio, aliiſque eiuſdem negotij partibus, noſtram, dum tempus tulerit, adhibebimus operam. Iam ad Algebræ ſummam explicandam ingrediamur.

REGVLÆ, QVAM ALGEbram vocant, ſumma.

CAP. XVII.

HActenus Algebræ materiam ſuppeditauimus: Nunc Regulæ ſententiam ſummatim exponemus in hæc verba,

Pro Numero incognito pone Radicem vnam: Cum qua exerce Quæſtionis propoſitum, donec AEquationem inueneris, eámque reduxeris. Tum per numerum Signi ſolitarij diuide partem alteram AEquationis, vel ab ea extrahe Radicem quam Signum oſtendit. Numerus Diuiſionis vel Extractionis, erit is ipſe quem inueſtigabas.

Hæc eſt Regulæ illius celeberrimæ, quam Algebram vocant, ſententia. Quæ Capita omnia ab aliis hactenus tradita vniuerſe complectitur: vt non temerè à nobis antea dictum ſit, hanc artem in Radicum inuentione totam ferè verſari. Sed Radices inuenire imprimis arduum & difficile, præſertim Cubicas, vt paulò antè meminimus. Porrò nonnulli pro 1℞ vnam Rem ponunt: alij Poſitionem dicunt. Quæ quanuis in idem recidant, tamen Radicis vox vna omnium aptiſſima: quemadmodum ex Progreſſione Geometrica, quæ per Arithmeticam Progreſſionem exponitur, initio operis declarauimus: tum ex collectione quæ ad ſcopum ducit. Radice enim inuenta, Res detegitur.

Iam verò exempla Quæſtionum proferemus, quibus Regulæ vſus extet manifeſtior, pauca illa quidem, ſed ex quibus lector ſtudioſus alia ſibi cuiuſcunque modi explicare poſſit: niſi quòd Cubicas Æquationes nullas dedimus: Harũ enim æſtimatio (vt iam non ſemel meminimus) nondum in artem expoſita eſt. Quædam autem aſſcribemus, quæ ſine Algebræ adminiculo explicari poſſent. Sed nihil vetat nos vnum ſcopum alia atque alia via attingere: præſertim in arte docenda. Verùm antequã Quæſtiones proponamus, Problemata quædam præſcribemus ex Stifelio cognitu non indigna: vt quæ ad Minutias explicãdas cõpendium afferãt.

DE COMPENDIIS MInutiarum.

CAP. XVIII.

Problema I.

Dati Numeri partes nominatas ad ipſum Numerum compendioſè addere.

Sit numerus datus, $\frac{3\,\text{℞}\,p\,6}{3}$, *cui ſint addendæ* $\frac{2}{5}$ *eiuſdem. Adde* $\frac{2}{5}$ *ad* 1, *fiũt* $\frac{7}{5}$: *multiplica* $\frac{2\,\text{℞}\,p\,6}{3}$ *per* $\frac{7}{5}$, *proueniunt* $\frac{21\,\text{℞}\,p\,42}{15}$ *ſeu* $\frac{7\,\text{℞}\,p\,14}{5}$, *ſumma quæſita. Probatio. Sumantur* 3 *in Radicem: tunc æſtimatio* $\frac{3\,\text{℞}\,p\,6}{3}$ *erit* 5: *quibus adde* $\frac{2}{5}$, *nempe* 2: *fiunt* 7: *ac tanti erunt* $\frac{7\,\text{℞}\,p\,14}{5}$: *ſcilicet* 7 ℞ *ſunt* 21, *quæ cum* 14 *faciunt* 35. *hæc diuiſa per* 5, *indicant* 7.

Probl. II.

Dati Numeri partem nominatam ad alteram ipſius partem compendioſè addere.

Sit datus Numerus, $\frac{15\,\text{℞}\,m\,12}{8}$. *Volo partem eius dimidiã ad tertiã eiuſdẽ addere. Addo* $\frac{1}{2}$ *ad* $\frac{1}{3}$, *fiunt* $\frac{5}{6}$: *per* $\frac{5}{6}$ *multiplico* $\frac{15\,\text{℞}\,m\,12}{8}$, *proueniunt* $\frac{75\,\text{℞}\,m\,60}{48}$, *ſumma quæſita. Probatio conſtabit, ſi* 4 *in*

Radicem

Radicem poſueris.

Probl. III.

A dato Numero partes nominatas auferre.

Sit datus numerus, $\frac{9q\ p\ 10\text{℞}\ m\ 21}{5\text{℞}}$*, à quo ſint auferendæ* $\frac{1}{2}$ *&* $\frac{1}{3}$. *Eas aufero ab* 1, *relinquitur* $\frac{1}{6}$: *Per* $\frac{1}{6}$ *multiplico* $\frac{9q\ p\ 10\text{℞}\ m\ 21}{5\text{℞}}$: *fiunt* $\frac{9q\ p\ 10\text{℞}\ m\ 21}{30\text{℞}}$, *ſumma quæſita. Ad probationem, ſumãtur 3 in Radicē. Tunc enim æſtimatio* $\frac{9q\ p\ 10\text{℞}\ m\ 21}{5\text{℞}}$, *erit 6: à quibus ablatis* $\frac{1}{2}$ *&* $\frac{1}{3}$, *relinquitur* $\frac{1}{6}$, *ſcilicet 1. Et tantundem efficiunt* $\frac{9q\ p\ 10\text{℞}\ m\ 21}{30\text{℞}}$.

Probl. IIII.

Dati Numeri partem nominatam ab eiuſdem parte altera nominata auferre.

Sit datus Numerus, $\frac{16\text{℞}\ p\ 24}{6}$: *ab huius tertia parte volo auferre quartam eiuſdem. Aufero* $\frac{1}{4}$ *ab* $\frac{1}{3}$, *ſupereſt* $\frac{1}{12}$: *per* $\frac{1}{12}$ *multiplico* $\frac{16\text{℞}\ p\ 24}{6}$, *proueniũt* $\frac{16\text{℞}\ p\ 24}{72}$, *ſumma quæſita. Probabitur, ſumptis 3 in Radicem.*

Probl. V.

Dati numeri partes nominatas inuenire.

Hoc problema ſub ſecundo continetur. Si enim $\frac{1}{2}$ *&* $\frac{1}{3}$ *huius fractionis,* $\frac{15\text{℞}\ m\ 12}{8}$, *fuerint inueniẽdæ: prouenient* $\frac{75\text{℞}\ m\ 60}{48}$. *Quòd ſi particula ſola fuerit, vt* $\frac{1}{3}$, *per hanc multiplica Numerum datum: Scilicet per* $\frac{1}{3}$ *multiplica:* $\frac{15\text{℞}\ m\ 12}{8}$ *fient* $\frac{15\text{℞}\ m\ 12}{24}$.

Probl. VI.

Numerum, à quo partes ſubtractæ fuerint, reponere.

Hic numerus, $\frac{75\text{℞}\ m\ 60}{48}$, *conſtituat dimidiam & tertiam partem cuiuſpiam Numeri ignoti. Volo eum Numerum inuenire. Addo* $\frac{1}{2}$ *ad* $\frac{1}{3}$, *fiunt* $\frac{5}{6}$: *per* $\frac{5}{6}$ *diuido* $\frac{75\text{℞}\ m\ 60}{48}$, *exeũt,* $\frac{450\text{℞}\ m\ 360}{240}$, *hoc eſt,* $\frac{15\text{℞}\ m\ 12}{8}$, *numerus quæſitus. Probatio ex ſuperioribus facilis eſt. Iam ad Quæſtionum explicationes veniamus.*

DE EXEMPLIS QVÆ DIVIſione ſola abſoluuntur.

Quæſtio I.

CAP. XIX.

Quæritur Numerus, qui per 9 multiplicatus, & producto ad 90 addito, tantundem efficiat quantum is ipſe Numerus per 14 multiplicatus.

Pro eo Numero pono 1℞. Multiplico 1℞ in 9, fiunt 9℞: his addo 90, fiunt 9℞ p. 90. Tum duco 1℞ in 14, fiunt 14℞, æquales 9℞ p. 90: id eſt, 5℞ æquales 90. Igitur, diuido 90 per 5, exeunt 18, Numerus quæſitus. Ad probationem, duco 18 m. 9, fiunt 162: quibus addo 90, exurgunt 252. Iam 18 ducta in 14, efficiunt eadem 252.

Hæc Quæſtio ad res ſic traducitur. Viator quidam 9 miliaria quotidie conficit: alter idem iter inſtituit, atque indidem: ſed decimo pòſt die profectus, 14 miliaria ſingulis diebus incedit. Quæro, hic poſterior quoto die priorem aſſequetur. Quum itaque prior iam 90 miliaria peregerit, 10 ſcilicet diebus, Pono ambos ſimul futuros in 1℞ dierum. Tum per Regulam 3, ſi 1 dat 9, quantum dat 1℞? fiunt 9℞, in priorem: Deinde ſi 1 dat 14, quantum dat 1℞? fiunt 14℞, in alterum. Quum igitur confecerit prior 9℞, præter 90 miliaria iam confecta: alter verò 14℞: tum ſimul futuri ſunt. Quamobrem 14℞ ſunt æquales 9℞ p. 90: id eſt 5℞, æquales 90, vt modò.

Hoc loco dubitabit quiſpiam, Quum initio per 1℞, dies ſignificarentur, quur interueniente Regula 3, per 9℞ ſignificantur miliaria? Id verò ſic accipiendum, in Regula 3, non tam miliaria ſola per 9℞ ſignificari, quàm miliaria per 1 diem multiplicata. Secundus enim Numerus, 9, habetur pro Numero per

Vnum

Vnum multiplicato, ſicque diem & miliaria includit: qualis etiam prima poſitio Radicus fuit. Quum enim pono 1℞, non tam Radicem intelligo dierum, quàm miliarium per dies multiplicatorum. Quoniam verò Diuiſio multiplicationem detegit, & contrà: fit vt numerus ex Diuiſione proueniens, dies ipſos indicet, quum antea in multiplicatione miliaria cum diebus confunderentur.

Hæc eadem Quæſtio ſic inuerti poterit. Viator ſingulis diebus 9 miliaria incedit: alter decimo pòſt die, iter ingreditur: quot miliaria hic incedet ſingulis diebus, vt priorem aſſequatur 18 diebus? Conſtat ex Regula 3, priorem 252 miliaria 18 diebus ambulaſſe. Alter itaque ſingulis diebus ambulet 1℞: ergo 18 diebus confecerit 18℞. Atque eæ erunt æquales 252. Quare diuiſis 252 per 18, exibunt 14 miliaria.

Quæſtio II.

Septem vlnæ panni purpurei cum tribus vlnis panni nigri, veneunt 58 Aureis: atque eadem æſtimatione, duæ vlnæ panni purpurei cum tribus vlnis nigri, veneunt 23 Aureis. Quanti eſt vlna vtriuſque? Pro vlna panni purpurei, pono 1℞: & erunt 7 vlnæ, 7℞: tres verò vlnæ panni nigri, erunt reſiduum 58, ſcilicet 58 m. 7℞. Duæ porrò vlnæ purpureæ, erunt 2℞: 3 verò nigræ, erunt 23 m. 2℞. Eruntque 23 m. 2℞ æqualia 58 m. 7℞, quum vtraque ſit æſtimatio 3 vlnarum panni nigri. Adde ad vtrunque 2℞: erunt 23 æqualia 58 m. 5℞, hoc eſt, 5℞ æquales 35. Diuide iam 35 per 5: exibunt 7. ac tot Aureis venibit vlna panni purpurei: proinde 7 vlnæ, 49 Aureis: 3 verò vlnæ panni nigri, erunt reſiduum ex 58, ſcilicet 9: eruntque 3 Aurei in vlnas ſingulas. Cætera ſunt manifeſta.

Hanc Quæſtionem facilius explicauimus quàm cæteri. Hinc autem facilitas Æquationis pendet, quòd in vtroque Quæſtionis capite interueniat numerus ternarij. Sed & ſi mutetur Numerus, omnino erit expedita æquatio, ex Regula 3. Sit enim quæſtio in hæc verba, 7 vlnæ panni purpurei cum 3 vlnis nigri, veneunt 58 Aureis: atque eadem pretij ratione, 2 vlnæ purpurei cum 4 vlnis nigri, veneunt 26 Aureis. Pro vlna purpurei, pono 1 ℞, vt modò. Erúntque 7 vlnæ, 7 ℞: & 3 vlnæ nigri, 58 m. 7 ℞: 2 verò vlnæ purpurei, 2 ℞: denique 4 vlnæ nigri, 26 m. 2 ℞. Iam ex 4 vlnis nigri, inquiram quanti veneunt 3 vlnæ quò 3 aliæ parentur, quæ ſint 3 prioribus æquales: ſcilicet, ſi 4 vlnæ panni nigri veneunt 26 m. 2 ℞, quanti venibunt 3? fient 19 $\frac{1}{2}$ m. 1 $\frac{1}{2}$ ℞. atque hæc erunt æqualia æſtimationi 3 vlnarum priorum, quæ eſt 58 m. 7 ℞. Adde itaque & ſubtrahe ad Æquationē conſtituendam, inuenies 38 $\frac{1}{2}$, æqualia 5 $\frac{1}{2}$ ℞. Diuide ex Algebræ ſententia: exibunt 7, æſtimatio Radicis, vt priùs.

Quæſtio III.

Mercator tribus emptionibus ſingulis parem Aureorum ſummam impendit: quarum vnaquaque lucrifacit $\frac{1}{12}$ ſummæ totius Tum nummus denuò in commercium poſitus, lucratur decimam partem totius ſummæ priore lucro auctæ. Is tandem habuit omnino 165 Aureos. Quæ fuit prima aureorum ſumma?

Fuerit 1 ℞. Proinde prius lucrum fuit $\frac{3}{12}$ ℞: hoc eſt, $\frac{1}{4}$ ℞: ſecundum verò fuit $\frac{1}{10}$ $\frac{5}{4}$ ℞: ea eſt $\frac{1}{8}$ ℞: hæc tria adde, fiunt $\frac{11}{8}$ ℞, quibus æquantur 165. Diuid: 165 per $\frac{11}{8}$, exibunt 120, ſumma Aureorum quæſita.

Quæſtio IIII.

Quæruntur duo Numeri in ratione tripla, quorum minor à maiori

maiori ſubductus tantum relinquat quantum maior per minorem diuiſus.

Prior eſt 1℞ : *alter* 3℞. *Aufer* 1℞ *à* 3℞, *manent* 2℞. *Diuide* 3℞ *per* 1℞, *exeunt* 3. *Itaque* 2℞ *æquantur* 3. *Diuide iam* 3 *per* 2, *exeunt* $\frac{3}{2}$. *Is erit prior Numerorum:alter* $\frac{9}{2}$.

Quæſtio V.

In Regio exercitu, peditum numerus octuplo ſuperat equitum numerum. In eo recenſendo, dantur 3 *Aurei in peditem:* 12 *in equitem. Summa aureorum, eſt* 18000. *Quantus eſt vtrinque numerus? Pro numero equitum, pono* 1℞: *vt ſit peditum numerus,* 8℞. *Tum ſic ſtabit Regula* 3,

1	12,	1℞?	12℞.
1	3,	8℞?	24℞.

Erunt itaque 36℞ *æquales* 18000. *Hæc diuide per* 36, *exeunt* 500, *Equitum numerus: Pedites igitur erunt* 4000.

Quæſtio VI.

Mercator emit quinas quaſque vlnas panni Aureis: 7 *vendidit ſeptenas quaſque Aureis* 11. *Is Aureos* 100 *lucrifecit omnino. Quot fuerunt vlnæ? Si attenderis* 100 *Aureos ſupereſſe ſorti, facilè ad æquationem peruenies. Vbi enim fictè poſueris quod ipſe initio impendit, & à ſumma totius pretij abſtuleris: prodibit lucrum.*

Ponatur itaque 1℞ *vlnarum. Tum ſi* 5 *vlnæ dant* 7, *dabit* 1℞ $\frac{7}{5}$ ℞. *Quare* $\frac{7}{5}$ ℞, *æſtimatio eſt empti. Deinde ſi* 7 *dant* 11, *dabit* 1℞, $\frac{11}{7}$ ℞. *Hæc erit venditi æſtimatio. Aufer igitur* $\frac{7}{5}$ ℞ *ab* $\frac{11}{7}$ ℞: *manent* $\frac{6}{35}$ ℞, *æquales* 100: *Diuide* 100 *per* $\frac{6}{35}$, *exibunt* 583 $\frac{1}{3}$, *numerus vlnarum. Probatio, Duc* 583 $\frac{1}{3}$ *in* $\frac{7}{5}$:

prouenient 816 $\frac{2}{3}$, numerus Aureorum quos initio impendit. Rurſus eadem 583 $\frac{1}{3}$ duc in $\frac{11}{7}$:fiunt 916 $\frac{2}{3}$, venditionis ſumma. Nam 816 $\frac{2}{3}$ cum 100 faciunt 916 $\frac{2}{3}$.

Quæſtio VII.

Emi Ceram 102 florenis, eo pretio, vt centenæ libræ conſtiterint 17 florenis: quot libras in ſingulos florenos ſum daturus, vt 102 floreni lucrum afferant 18 florenorum? Hæc per ſolam Regulam 3 abſoluitur. Conſtat quippe 102 florenos dare 600 libras. Quamobrem vt lucrifaciam 18 flor. oportet ex 600 libris mihi 120 florenos confici. Quum igitur diuiſero 600 per 120, exibunt 5: ac tot libras ſingulis florenis ſum venditurus. Tamen vt Algebræ ſit locus, pono 1℞ librarum. Si itaque 1 flor. dat 1℞, quantum dabunt 120 floreni? fient 120℞, æquales 600.

Quæſtio VIII.

Quatuor maſſæ ſic miſtæ ſunt argento & Cupro, vt prima beſſes ſeu marcas 11 capiat, marcæ verò ſingulæ tantùm ſemuncias 9 argenti puri: altera eſt marcarum 15, atque in ſingulas marcas habet argenti ſemuncias 7: tertia, marcarum 24, quarum vnaquæque ſemuncias 10 argenti accipit: quarta eſt marcarum 136, quarum ſingulæ habent argenti ſemuncias 14: Quæritur quot marcæ argenti puri adiiciendæ ſunt, vt ex iis omnibus maſſa conſletur, cuius marcæ argenti puri ſemunc. 15 accipiant. Hanc proponit Stifelius ordine primam, Cap. VIII. ſuæ Algebræ, iiſdem numeris. Quum itaque beſſis ſeu marcæ pondus ſtatum, ſit 16 ſemunciarum: erunt in prima maſſa, quæ eſt 9 marcarum ſemunciæ argenti 99, ſed Cupri, 77: in ſecunda, quæ eſt 15 marc. erunt 105 ſemunciæ argenti, & 135 Cupri:

in reliquis verò duabus, vt vides ex ſubſcripta numerorum collocatione.

Marcę miſtę.	Semunc.arg.	Semunc.Cupri.
11	99	77
15	105	135
24	240	144
136	1904	272
186	2348	628.

Quum itaque marcæ ſingulæ ſemuncias 15 *argenti capere debeant, vt eſt Quæſtionis ſumma, capiet earum vnaquæque Cupri ſemunciam. Quo fit, vt maſſa ipſa conficienda tot marcas ſit habitura, quot & ſemuncias Cupri. At ſemunciæ Cupri omnino ſunt* 628. *Marcæ verò* 186. *Quare complendus erit numerus* 628 *marcarum. Additis igitur* 442 *marcis argenti puri ad* 4 *maſſas, confectum erit negotium, citra Algebræ adminiculum.*

Quòd ſi maſſa conflanda ſit, verbi gratia, 13 *ſemunciarum argenti, tum ſingulæ marcæ ſemuncias ternas Cupri ſunt accepturæ. Quapropter diuiſis* 628 *per* 3, *exibunt* $209\frac{1}{3}$, *numerus marcarum quibus conſtabit maſſa. Erunt itaque adiiciendæ* $23\frac{1}{3}$ *marcæ argenti puri.*

Si verò conficienda eſſet maſſa quæ 12 *ſemuncias arg. puri caperet: tum Cuprum eſſet adiiciendum, non argentum. Nam in ſpecie primùm poſita, marcæ ſingulæ ſemuncias capiunt plus* 12 *arg. puri. Proinde diuidenda eſſent* 2348 *per* 12, *vt in numero Indicante ſeu Quotiente proueniat marcarum ſumma, nempe* $195\frac{2}{3}$. *Quare adiiciendæ* $9\frac{2}{3}$ *marcæ Cupri. Idem in cæteris ſpeciebus erit obſeruandum, nulla ope Algebræ neceſſaria.*

Tamen vt ipſa locum inueniat, repetita primæ Quæſtionis ſententia, ponamus, vt Stifelius, 1℞ marcarum. Et quæ conſlabitur maſſa, erit 186 p. 1℞. Sic autem ſtatuentur numeri ad Regulam Trium.

Marcę miſtę,	Marc. arg.	Sem. Cup.	Marcę miſt.	Marc. nouę.
186 p.	1℞	628,	1 ?	$\frac{628}{186\ p\ 1℞}$

Quum itaque marcæ ſingulę tantùm ſemunciam Cupri accipiant, erunt $\frac{628}{186\ p\ 1℞}$ *æqualia* 1 *: factáque reductione ad integra, erunt* 186 *p.* 1℞ *æqualia* 628*, ſicut aſſcriptum vides.*

$$\frac{628}{1} \qquad \frac{1}{186\ p\ 1℞}$$
$$628 \qquad 186\ p.\ 1℞.$$

Demum ex reductione ad minimam æſtimationem, erit 1℞ *æqualis* 442*, quæ erit marcarum addendarum ſumma.*

Iam verò ſi quæratur quot marcæ Cupri ſint adiiciendæ, vt marcæ ſingulæ capiant ſemuncias 15 *Cupri, ob id, vnicam argenti: erunt ſtatuenda* 2348 *in medio Regulæ Trium: fiéntque* $\frac{2348}{186\ p\ 1℞}$*, æqualia* 1*. Et erit Radicis æſtimatio,* 2162*. Sic etiam ſtatui poterunt numeri,*

Marcæ arg.	Marcæ Cupri.	Semunc. Cup.	Marca miſta.
186 p.	1℞	628 p. 16℞,	1 ?

Nam quum beſſis, ſeu marca ſit 16 *ſemunc. ob idque ſemunciarum numerus ſedecuplus ad numerum marcarum: fiet vt* 16℞ *ſemunciarum reſpondeant* 1℞ *marcarum. Quapropter in idem recidet cum ſuperiore. Sicut & prima ſpecies ſic poterat conſtitui,*

Marc. miſti arg.	Mar. pu. arg.	Semunc. pu. arg.	Marca miſta.
186 p.	1℞	2348 p. 16℞,	1 ?

At ſi ſcire cupies, ſic conflatis 4 maſſis, vnaquæque marca quot ſemuncias arg. capiat: diuide 2348 *per* 186*, exibunt* $12\frac{58}{93}$*. Erunt igitur ſemunciæ Cupri,* $3\frac{35}{93}$*.*

Quòd ſi commiſcenda eſſet quinta maſſa, quæ 3 *duntaxat ſemuncias &* 13 *Cupri in ſingulas marcas caperet, vt fierent ſingulæ marcæ, ſemunciarum* 5 *argenti, &* 11 *Cupri, quantam eſſe oportet quintam hanc maſſam? Primus Numerus Regulæ* 3*,*

erit

erit 186 p. 1℞, vbi 1℞, marcas incognitas nouæ maſſæ deſignabit: ſecundus, 2348 p. 3℞ (& erunt 3℞ pro numero ternarum ſemunciarum argenti incognito): tertius erit 1 (erit hic pro marca vna nouæ maſſæ). Quia igitur pro marcarum numero incognito ponitur 1℞ & triplus eſt numerus ſemunciarum argenti, pro hoc numero ſemunciarum incognito ponentur 3℞, hoc ſitu,

Marcæ miſtæ.	Semunciæ arg.	Marca noua.	
186 p. 1℞	2348 p. 3℞	1?	$\frac{2348\ p\ 3℞}{186\ p\ 1℞}$.

Itaque $\frac{2348\ p\ 3℞}{186\ p\ 1℞}$ *erunt æqualia 5. ſemunciis argenti: & per reductionem ad integra, erunt 2348 p. 3℞ æqualia 930 p. 5℞: ac demum 2℞ æquales 1418. Erit ergo 1℞, 709, numerus marc. quibus conſtabit maſſa 5. Probatio, Adde 709 ad 186: fiunt 895 marcæ, quæ 14320 ſemuncias efficiunt. Duc 895 in 5 ſemuncias argenti maſſæ poſtremæ: proueniunt 4475: duc rurſus 895 in 11 ſemuncias Cupri nouæ maſſæ: proueniunt 9845. Adde iam 4475 ad 9845: proueniunt 14320 ſemunciæ: hoc eſt, 895 marcæ.*

Quòd ſi ex 4 maſſis conflandæ ſint 15 ſemunciæ argenti in ſingulas marcas: & quæratur quantum Cupri ſit eximendum: erit poſitio ad hunc modum,

Marc. miſt. arg.	Marc. Cup.	Semunc. arg.	Mar. nouæ maſſæ.
186 m.	1℞	2348,	1?

Erit itaque marca nouæ maſſæ, $\frac{2348}{186\ m.\ 1℞}$ *ſemunciæ argenti. Erítque hæc minutia æqualis 15 ſemũciis arg. Aestimatio igitur Radicis, erit 29* $\frac{7}{15}$*, ac tot marcæ eximendæ erunt, hoc eſt, 471* $\frac{7}{13}$ *ſemunc. vt relinquatur maſſa quæ in ſingulas mar. capiat 15 ſem. arg. Probatio. Aufer 29* $\frac{7}{15}$ *marcas, ſcilicet 471* $\frac{7}{15}$*, à numero ſemũ. Cupri, nempe à 628: manebunt 156* $\frac{8}{15}$*: Sed & diuide 2348 per 15, exibunt rurſus 156* $\frac{8}{15}$*. Tot enim marcas eſſe oportet quot ſemuncias Cupri. Vel vt Stifelius probat,* $\frac{2348}{15}$ *marcæ dant* $\frac{2348}{1}$ *ſemuncias, quantum dat 1 Marca? fiunt 15 ſemunciæ.*

Poterat etiam ſic ſtatui hæc poſtrema Quæſtio,

Marc.miſt.arg.	Marc.Cup.	Semunc.Cup.	Marca nouæ maſſę.
186 *m.*	1℞	628 *m.* 16℞,	1?

Vbi $\frac{628\ m\ 16℞}{186\ m\ 1℞}$ *ſemunciæ Cupri æquantur* 1 *ſemunciæ Cupri:quum ſingulæ marcæ ſemuncias* 15 *argenti capiant.Facitque* 1℞, 29 $\frac{7}{15}$ *vt prius. Auferendo verò* 1℞ *à* 186 *marcis Cupri,auferendæ quoque ſunt* 16 ℞ *à* 628 *ſemunciis Cupri:quum marca ſit* 16 *ſemunciarum. Conſtat enim æquatio inter* 1 ℞ *marcarum & 16℞ ſemunciarum.Hæc ſanè prolixius quàm decuit congeſſimus: niſi quòd Quæſtiones interdum ponuntur non tam ad artis,quàm ad rerum cognitionem.*

Quæſtio VIII.

Quæruntur duo Numeri in ea ratione, vt dimidia pars ſecundi p. 2 *addita ad priorem, ſit noncupla ad reliquum ſecundi:tertia verò prioris p.* 3 *addita ad ſecundum, ſit tripla ad ipſius prioris reliquum.*

Pono pro ſecundo numero(facilioris calculi gratia) 2℞ *: à quibus aufero* 1℞ *p.* 2 *: reliquum erit* 1℞ *m.*2. *Quum igitur* 1℞ *p.*2 *addita ad priorem illum numerum, ſit noncupla ad* 1℞ *m.*2*: erunt* 9℞ *m.*18 *æqualia priori(quantuſcunque ſit)cum* 1℞ *p.*2. *Ablatis igitur* 1℞ *p.*2 *à* 9℞ *m.* 18, *manebunt* 8℞ *m.* 20*:atque is eſt prior numerus. A quo aufero* $\frac{1}{3}$ *p.*3, *ſcilicet* 2 $\frac{2}{3}$ ℞ *m.* 3 $\frac{2}{3}$ (*& ſuperſunt* 5 $\frac{1}{3}$ ℞ *m.* 16 $\frac{1}{3}$). *Tum addo* 2 $\frac{2}{3}$ ℞ *m.* 3 $\frac{2}{3}$ *ad ſecundum, fiunt* 4 $\frac{2}{3}$ ℞ *m.* 3 $\frac{2}{3}$ *: atque hoc triplum eſt ad* 5 $\frac{1}{3}$ ℞ *m.* 16 $\frac{1}{3}$. *Huius verò triplum quoque eſt* 16℞ *m.* 49. *Sunt igitur* 16℞ *m.*49 *æqualia* 4 $\frac{2}{3}$ ℞ *m.*3 $\frac{2}{3}$ *: hoc eſt, ex proba reductione,* 11 $\frac{1}{3}$ ℞ *æqualia* 45 $\frac{1}{3}$. *Diuido itaque* 45 $\frac{1}{3}$ *per* 11 $\frac{1}{3}$*: exeunt* 4, *Radicis æſtimatio. Secundus igitur Numerus, erit* 8. *A quo aufer* $\frac{1}{2}$ *p.*2 *: ſuperſunt* 2 *: Cuius noncuplum, eſt* 18. *Aufer* 6 *ab* 18 *:ſuperſunt* 12 *prior Numerus. Probatio in promptu eſt.*

Quæſtio IX.

OEnopola duplex habet vinum, quorum alterum eſt 14 Aureorum: alterum, 18. Ex vtroque permiſcere inſtituit vinum 16 Aureorum. Quantum ex vtroque haurietur? Sumet ex priore 1℞: ex altero, 1 m. 1℞. Eritque Numerorum conſtitutio talis,

Vinum.	Aurei.	Vinum.	
1	14,	1℞?	14℞.
1	18,	1 m. 1℞?	18 m. 18℞.

Duo quarti ſimul numeri, ſcilicet 14℞ & 18 m. 18℞, æquantur 16: Et per reductionem, 4℞ æquantur 2. Quare erit 1℞, $\frac{1}{2}$: atque etiam 1 m. 1℞ erit $\frac{1}{2}$. Vtriuſque igitur excipiet dimidium. Probatio eſt, quòd $\frac{1}{2}$ 14 eſt 7: & $\frac{1}{2}$ 18, eſt 9: quæ ſimul addita, 16 efficiunt.

Præter Algebram, animaduerte in huiuſmodi Quæſtionibus eſſe obſeruandum, Numerorum differentia quam habeat rationem ad tertium Numerum. Velut in hoc Exemplo, differentia 14 & 18, eſt 4: Hæc diuiditur bipartitò, vt ex 14 fiant 16: nempe à 14 ad 16, deſunt 2: & à 16 ad 18, eadem 2. Atque ob id, vtriuſque vini hauritur dimidium. Quòd ſi commiſcendum fuiſſet vinum 15 Aureorum: tum quoniam ex differentia, quæ eſt 4, tantùm ſumitur $\frac{1}{4}$ ad complendum 16: ſed 15 ab 18 abſunt $\frac{3}{4}$ eiuſdem differentiæ: fuiſſet ex maiori pretio, ſcilicet ex 18, eximenda quarta pars: à minori verò, nempe à 14, excipiendæ fuiſſent $\frac{3}{4}$.

Probatio eo conſtat, quòd 10 $\frac{1}{2}$ cum 4 $\frac{1}{2}$ conſtituant 15. Quòd ſi commiſcendum fuiſſet vinum 17 Aureorum: tum ex minore pretio, 14, ſumenda fuiſſet $\frac{1}{4}$: ex maiore verò, 18, ſumendæ $\frac{3}{4}$: De cæteris idem iudicium.

Quæſtio X.

Quæritur Numerus à quo $\frac{2}{5}$ ablatæ numerum reddant tanto minorem 100, *quánto ipſe Numerus ſuperat* 100.

Is eſt 1℞. *à qua* $\frac{2}{5}$ *ablatæ, relinquunt* $\frac{3}{5}$ ℞. *Quare* 100 *m.* $\frac{3}{5}$ ℞ *æquantur* 1℞ *m.* 100. *Et ex reductione*, 1 $\frac{3}{5}$ ℞ *æquantur* 200. *Quare* 1℞, *eſt* 125. *Aliter, Quia Numerus ſuperat* 100, *pono exuperantiam eſſe* 1℞; *vt ſit ipſe Numerus* 100 *p.* 1℞: *hinc aufero* $\frac{2}{5}$ (*id verò fiet ductu* 100 *p.* 1℞ *in* $\frac{3}{5}$, *per tertium Problema*) *ſuperſunt* $\frac{300 \text{ p } 3℞}{5}$, *æqualia* 100 *m.* 1℞: *hoc eſt,* 300 *p.* 3℞, *æqualia* 500 *m.* 5℞: *ac demùm* 8℞ *æquales* 200. *Erit igitur* 1℞, 25: *proinde Numerus ipſe,* 126, *vt priùs.*

Quæſtio XI.

Tres Milites prædam Aureorum, ex conuentu, ſic inter ſe diuidebant, vt primus, dimidiam: ſecundus, tertiam partem: tertius, ſextam caperet. Inter hæc, lite, vt fit, oborta, ad manus ventum eſt: & tantum quiſque abſtulit quantum per vim potuit. Mox lite compoſita, primus in medium repoſuit $\frac{1}{3}$, *ſecundus* $\frac{1}{4}$, *tertius* $\frac{1}{5}$ *Aureorum quos rapuerat: & repoſitam pecuniam ex æquo diuiſerunt. Atque ex ea diuiſione ſtetit lex inter ipſos primùm conſtituta: vt primus, ſemiſſem: alter, trientem: tertius, ſextantem ſibi haberet. In iis autem partitionibus ſingulis nulla interuenit Numerorum fractio. Quanta fuit Aureorum ſumma? & quanta cuiuſque portio? Huius Quæſtionis ſoluendæ ratio, à quibuſdam Reuerſio ſeu Recurſus vocatur.*

Sit itaque repoſita pecunia, 1℞: *ſumma verò Aureorum, doctrinæ gratia, fingatur fuiſſe* 12. *Quum igitur ex æquo diuiſerint* 1℞, *habuit quilibet* $\frac{1}{3}$ ℞: *proinde primus, quum* $\frac{1}{3}$ ℞ *receperit, habebit ſemiſſem totius ſummæ, nempe* 6. *Quum itaque reponeret* $\frac{1}{3}$ *raptæ à ſe pecuniæ, reliqua ſibi fecit* 6 *m.* $\frac{1}{3}$ ℞, *duplum*

eius

eius, quam repoſuit, ſummæ (ſcilicet $\frac{2}{3}$ raptæ à ſe pecuniæ). Quod igitur repoſuit, eſt 3 m. $\frac{1}{6}$ ℞. Secundus verò vnà cum $\frac{1}{3}$ ℞, habebit $\frac{1}{3}$ prædæ, nempe 4: Quum itaque reponeret $\frac{1}{4}$ raptæ pecuniæ, reliqua habuit 4 m. $\frac{1}{3}$ ℞, triplum eius, quam repoſuit, ſummæ (ſcilicet $\frac{3}{4}$ raptæ pecuniæ). Quod igitur repoſuit, eſt 1 $\frac{1}{3}$ m. $\frac{1}{9}$ ℞. Tertius porrò quum receperit $\frac{1}{3}$ ℞, habebit $\frac{1}{6}$ prædæ, ſcilicet 2. Quum itaq; reponeret $\frac{1}{5}$ raptæ pecuniæ, reliqua habuit 2 m. $\frac{1}{3}$ ℞, quadruplum eius, quam repoſuit, ſummæ (ſcilicet $\frac{4}{5}$ raptæ à ſe pecuniæ): Quod igitur reponit, eſt $\frac{1}{2}$ m. $\frac{1}{12}$ ℞. Adde iam tres ſummas repoſitas: ſcilicet 3 m. $\frac{1}{6}$ ℞, 1 $\frac{1}{3}$ m. $\frac{1}{9}$ ℞, & $\frac{1}{2}$ m. $\frac{1}{12}$ ℞: fiunt 4 $\frac{5}{6}$ m. $\frac{13}{36}$ ℞, æqualia 1 ℞: Et per tranſpoſitionem ac reductionem, erunt 49 ℞. æquales 174. Quare erit 1 ℞, 3 $\frac{27}{49}$. At minutiæ adſunt, præter hypotheſin. Id verò ex ficta poſitione factum eſt: nempe quòd 12 nobis finxerimus. Integra igitur ſic venabimur. Pro 3 $\frac{27}{49}$, ſumemus vniuerſam ipſarum 49 ℞ æſtimationem, ſcilicet 174: atque ea erit ſumma repoſita. Tum numerum ipſum Rad. ducemus in 12: proueniunt 588, prædæ ſumma. Probatur ſic. Dimidia pars 588, eſt 294, portio primi. Tertia eorundem pars, eſt 196, portio ſecundi: ſexta denique pars 588, eſt 98, portio tertij. Porrò tertia pars 174 (repoſitæ ſcilicet pecuniæ) quam quiſque recepit, eſt 58. Quum itaque primus, receptis 58, haberet 294: is antea habuit 236, duplum ſcilicet repoſitæ à ſe pecuniæ: proinde repoſuit ipſe 118: rapuerat 354. Simili ratiocinatione ſecundus repoſuit 46, quum rapuiſſet 184. Tertius demùm repoſuit 10, rapuerat 50: adde tres repoſitas ſummas, fiunt 174.

Quæſtio XIII.

Progreſſionis Arithmeticæ, quæ 12 Numeris conſtat, exuperantia eſt 1. Numeri omnino faciunt 93. Quæritur primus Numerorum.

Is eſt 1 ℞: & erit ultimus Numerorum, 11 p. 1 ℞. Igitur adde primum ad ultimum, ſcilicet 1 ℞ ad 11 p. 1 ℞: fiunt 2 ℞ p. 11. Cuius dimidium, 1 ℞ p. 5 $\frac{1}{2}$, duc in 12, fiunt 12 ℞ p. 66, æquales 93, hoc eſt, 12 ℞ æquales 27. Quare 1 ℞ eſt 2 $\frac{1}{4}$.

Quæſtio XIIII.

Progreſsionis Arithmeticæ primus Numerus, eſt 4: ultimus, 9: omnium verò ſumma, eſt 58 $\frac{1}{2}$. Quot Numeris conſtat Progreſsio?

Pro omnibus ponitur 1 ℞: duorum extremorum ſumma, eſt 13: quorum dimidium, $\frac{13}{2}$ duc in 1 ℞: fiunt $\frac{13℞}{2}$, æquales 58 $\frac{1}{2}$: & ex reductione, 26 ℞ æquales 234: Radix eſt 9: ac tot ſunt Numeri Progreſsionis. Iam ſi exuperatio Progreſsionis quæratur, pone 1 ℞. Et erunt numeri intermedij, 4 p. 2 ℞, 4 p. 3 ℞, 4 p. 4 ℞, 4 p. 5 ℞, 4 p. 6 ℞, 4 p. 7 ℞, 4 p. 8 ℞: atque ij omnes iuncti, ſcilicet 28 p. 28 ℞; æquabuntur 58 $\frac{1}{2}$ m. 13 (quum ſit primi & ultimi ſumma, 13) hoc eſt, 56 ℞. æquabuntur 35. Quare 1 ℞ facit $\frac{6}{5}$.

Quæſtio XV.

Exercitus Regius, Gallis Heluetijs & Germanis comparatus, Gallorum quidem capit 10000: Heluetios verò habet dimidia parte pauciores, quàm Gallos unà cum Germanis: ſed Germanos tertia parte pauciores, quàm Gallos cum Heluetiis. Quantus eſt Heluetiorum, & quantus Germanorum numerus?

Sint Heluetij 1 ℞. Quúmque ipſi ſint $\frac{1}{2}$ Gallorum & Germanorum: erunt Galli, & Germani, 2 ℞. Omnes, 3 ℞. Rurſus quum Germani ſint $\frac{1}{3}$ Gallorum & Heluetiorum (hi verò

ſunt 1 ℞

ſunt 1 ℞ *p.* 10000) *erunt iidem Germani*, $\frac{1}{3}$ ℞ *p.* 3333 $\frac{1}{3}$. *Adde omnia, ſcilicet* 10000, 1 ℞ *&* $\frac{1}{3}$ ℞ *p.* 3333 $\frac{1}{3}$: *fiunt* 1 $\frac{1}{3}$ *p.* 3333 $\frac{1}{3}$, *æqualia* 3 ℞. *Et tranſpoſitis reductiſque partibus, erunt* 5 ℞ *æquales* 40000. *Faciétque* 1 ℞, 8000, *numerum Heluetiorum: proinde Germanorum numerus, eſt* 6000: *totúſque exercitus*, 24000.

Quæſtio XVI.

Hoc loco in Quæſtionem proponemus hiſtoriam peruulgatam, quam Vitruuius memoriæ prodidit lib. IX *Architecturæ. Ea eſt de Corona aurea, quam Hieron Syracuſanorum tyrannus Diis ex voto obtulit. Quæ poſtquam eſſet conſecrata, deprehenſum eſt magnam auri portionem ab aurifice ſurreptam, & argenti tantundem ſuppoſitum. Quod Rex indignè ferens, accerſito Archimede iubet vt Corona illibata (vel quòd rem ſacram attrectare nefas eſſet, vel quòd operis iactura magni conſtaret) furtum artificis detegeret. Quod negotium diu Archimedem exercuit. Quúmque dudum nihil proficeret, balneum aliquãdo ingreſſus, animaduertit aquam, pro rata portione, corpori intromiſſo cedere, atq; è labro effluere. Vnde præ gaudio è balneo exiliit, & contento curſu, nudus vt erat, vociferari cœpit, Reperi, reperi: ſibi interim notam inſaniæ concilians apud eos, qui rerũm cognoſcendarum ſtudium non ſentiunt quantam habeat delectationem. Secum itaque rationem iniit ſcopum attingendi ex aquæ interim fluentis, dum ipſe lauaretur, portione. Vas quippe æneum affabrè factum aqua impleri iuſsit. In quod quum Coronam ſacram conieciſſet, aquam è vaſe excedentem diligentiſsimè excepit. Deinde in ipſum vas denuò impletum, maſſam auri puri, atque eiuſdem cum Corona ponderis, immiſit: & effluentem aquam pari cura exceptam ſepoſuit. Poſtremò maſſam argẽti puri, quæ & ipſa Coronam æquaret pon-*

dera, in vas repletum impoſuit: atque eodem ſtudio aquam effluentem collegit. Tum examinata aquarum proportione, mandatum negotium confecit. Quod cuiuſmodi fuerit docebimus, hac arte: Faciamus Coronæ votiuæ pondus, fuiſſe decem librarum. Tum pro argenti ſuppoſiti pondere, ponatur 1 ℞. Fuit igitur aurum purum Coronæ 10 m. 1 ℞: Porrò ob Coronam immerſam effluxiſſe $\frac{1}{8}$ *aquæ: ob auri maſſam,* $\frac{1}{30}$*: Denique ob maſſam argenti,* $\frac{3}{4}$. *Numeri verò ad ſitum Regulæ Trium ſic ſtabunt,*

Lib. Auri,	Aqua,	Lib. Arg.	Aqua.
10	$\frac{3}{4}$,	1 ℞?	$\frac{3\text{℞}}{40}$.
10	$\frac{1}{30}$,	10 *m*. 1 ℞?	$\frac{10\ m\ 1\text{℞}}{300}$.

Itaque 1 ℞, id eſt, argentum ſuppoſitum, eiecit $\frac{3\text{℞}}{40}$ *aquæ: aurum verò ipſius Coronæ,* $\frac{10\ m\ 1\text{℞}}{300}$. *Proinde tota Corona eiecit* $\frac{86\text{℞}\ p\ 40}{1200}$*: atque ſic Numerus erit æqualis* $\frac{1}{8}$ *: Et per reductionem ad integra, erunt 688 ℞ p. 320, æqualia 1200: ac poſtremò erunt 688 ℞ æquales 880. Erítque 1 ℞, 1* $\frac{12}{43}$*, argentum ſuppoſitum. Fuerunt igitur auri puri tantùm 8* $\frac{31}{43}$ *libræ.*

Probatio. Fuerit vas ipſum, doctrinæ gratia, capax 120 librarum aquæ (nam 120 in particulas commodè deducitur). Itaque auri maſſa, libras 4 aquæ emittet: argenti maſſa, 90 libras: Corona verò, 15. ac per Regulam Trium: ſi 10 libr. auri dant 4 lib. aquæ: 8 $\frac{25}{43}$ *auri dabunt 3* $\frac{22}{43}$*: Rurſus ſi 10 libræ argenti dant 90 lib. aquæ, 1* $\frac{12}{43}$ *lib. dabunt 11* $\frac{22}{43}$. *Iam 3* $\frac{21}{43}$ *& 11* $\frac{22}{43}$ *faciunt 15 libras. Qui ſcopus fuit.*

DE EXEMPLIS AD RADI-cis extractionem per-tinentibus.

CAP. XX.

Quæſtio I.

QVæruntur duo Numeri in ratione dupla, qui additi tantundem efficiant, quantum inter ſe multiplicati.

Ii ſunt 1℞ *&* 2℞ *: addo, fiunt* 3℞ *: multiplico* 1℞ *per* 2℞ *: fiunt* 2q *, æquales* 3℞ *: &* 1q *æquale* $1\frac{1}{2}$ ℞ *. Iam extrahenda eſt Radix Quadrata huius Numeri,* $1\frac{1}{2}$ ℞ *. Tantùm auferendum ſignum minus à maiori : ſcilicet* ℞ *à* q *: manet* 1℞ *, æqualis* $1\frac{1}{2}$ *. Is erit prior Numerorum : alter,* 3 *. Nam additio* 3 *ad* $1\frac{1}{2}$ *facit* $4\frac{1}{2}$ *: multiplicatio eorundem inter ſe itidem facit* $4\frac{1}{2}$ *. Quod ſequitur Exemplum, eiuſdem modi eſt,*

Quæritur Numerus cuius $\frac{1}{3}$ *in ſeipſam ducta, & productum in* $\frac{1}{4}$ *ipſius Numeri, conſtituant Numerum, cuius Radix quadrata eſt ipſe Numerus qui quæritur.*

Is Numerus eſt 1℞ *: Cuius* $\frac{1}{3}$ *in ſeipſam ducta facit* $\frac{1q}{9}$ *. Hunc duco in* $\frac{5℞}{4}$ *: fit* $\frac{1q}{36}$ *, æqualis* 1q *: id eſt,* 1c *æqualis* 36q *: ac demum* 1℞ *æqualis* 36 *. Is eſt Numerus quæſitus.*

In iis itaque duabus ſpeciebus, nihil opus eſt extractione, ſed ſola reductione: quanuìs hic locus Stifelium diſtineat, dum probat in æquatione, 1q *cum* $1\frac{1}{2}$ ℞ *, Radicem Quadratam* $1\frac{1}{2}$ ℞ *, eſſe* $1\frac{1}{2}$ *. In hac item,* 1c *cum* 36q *, Radicem Cubicam* 36q *, eſſe* 36 *. Quod certè notiſſimum eſt: quum omnis Numerus quadra-*

tas definitè æquetur toti Radicum ſummæ. Etenim manifeſtum eſt, ſi 1q ſit æquale 3℞, aliam Radicem eſſe non poſſe quàm 3 (de numeris abſolutis ſemper intelligo) quum 3 in ſe ducta, efficiant numerum tribus Radicibus compoſitum: 4, quatuor: 5, quinque: ac ſic in reliquos. Si igitur 1q ſit æquale $1\frac{1}{2}$ ℞, oportet Radicem eſſe $1\frac{1}{2}$.

Quæſtio II.

Superficies æquediſtantium laterum Rectangula, longitudinem quadruplo maiorem habet, quàm latitudinem. Area verò eſt 576. Quæruntur duo latera.

Minus latus eſt 1℞: maius, 4℞: Hæc inter ſe ducta, faciunt 4q, æqualia 576: & 1q æquale erit 144. Radix igitur eſt 12, minus latus: maius verò 48.

Quæſtio III.

Trianguli Orthogonij duo latera rectum angulum continentia ſunt in proportione $1\frac{2}{5}$, id eſt, ſuperbipartiente quintas: Subtenſa verò linea, eſt 52. Quantum eſt vtrunque laterum?

Notum eſt ex XLVII primi Elementorum Euclidis, in Triangulis Rectangulis quadratum lineæ rectum angulum ſubtendentis eſſe æquale duobus reliquorum laterum quadratis: Quapropter cognito quadrato 52 (quod eſt 2704) faciamus vnum laterum (ad vitandas minutias) eſſe 5℞: alterum erit 12℞. Duc 5℞ in ſe, fiunt 25q: Tum 12℞ in ſe, fiunt 144q. Hæc adde, fiunt 169q, æqualia 2704. Eritque 1q æquale 16. Quapropter 1℞ eſt 4. Fuit igitur vnum laterum, 20: alterum, 48.

Quæſtio

Quæſtiò IIII.

Columna quædam Quadrangula eſt rectangula. Huius la tera quæ ad baſin, inter ſe habent ſeſquitertiam rationem: altitudo verò eſt dupla ſuperbipartiens tertias ad maius latus ipſius baſis. Et eſt columna 93312. Quæruntur laterum dimenſiones.

Minus latus, eſt 3℞: *maius, eſt* 4℞: *altitudo*, $10\frac{2}{3}$ ℞. *Hæ dimenſiones inter ſe multiplicatæ, faciunt* 128cc, *æquales* 93312: *Fitque* 1cc *æqualis* 729. *Erit ergo* 1℞, 9. *Quapropter minus latus, eſt* 27: *maius verò*, 36: *altitudo*, 96.

Quæſtio V.

Quæritur Numerus, qui inter duos Numeros conſtitutus alterum quinario ſuperet: ſed ab altero ſuperetur ternario: ij verò extremi duo Numeri ſimul conſtituant 48.

Is numerus, eſt 1 ℞: *duo extremi numeri*, 1 ℞ *p*. 3, & 1 ℞ *m*. 5: *qui inter ſe multiplicati, producunt* 1q *m*. 2℞. *m*. 15, *æqualia* 48. *Proinde erit* 1q *æquale* 63 *p*. 2℞. *Horum Radix, eſt* 9, *Numerus quæſitus. Duo extremi numeri, erunt* 6 & 12.

Quæſtio VI.

Quæritur Numerus qui duos Numeros ſuperet, alterum quidem octonario, alterum ſenario: atque ij duo numeri inter ſe multiplicati, efficiant Numerum, qui eum quem quærimus quaternario ſuperet.

Is Numerus eſt 1℞: *Duo minores*, 1℞ *m*. 8, *&* 1℞ *m*. 6. *Hos duos inter ſe multiplico, fiunt* 1q *p*. 48 *m*. 14 ℞, *æqualia* 1℞ *p*. 4, *hoc eſt*, 1q *æquale* 15 ℞ *m*. 44. *Huius Numeri Radix maior (duplicem enim habet Radicem) eſt* 11, *Numerus quæſitus. Duo Numeri minores, ſunt* 5 *&* 3. *Altera Radix eſt* 4: *quæ etiam ad Quæſtionis propoſitum accommodatur: ſed per Numeros quos Abſurdos vocant, ſcilicet per Numeros infra nihil. Verbi cauſa, Sumatur hæc poſterior Radix*, 4, *pro eo quem quærimus, Numero. Duo numeri minores erunt m*. 4. *& m*. 2: *qui inter ſe multiplicati efficiunt* 8.

Vides Numeros fictos infra nihil ſine vſu non eſſe: quum Regularum fidem faciant. Imò miraculo non caret quòd ex ipſorum multiplicatione, qui nulli ſunt, producantur Numeri veri. Magna porrò huc ingenij contentio incidit, an ex nihilo aliquid faciat Natura: tum an idipſum quod eſt, ad nihilum redigi poſſit. Quin ad inſtitutum pergamus.

Quæſtio VII.

Quæro duos Numeros, qui inter ſe multiplicati faciant 72: *ipſorum verò quadrata ſimul iuncta, faciant* 180.

Cognito quadrato 72, *quod eſt* 5184, *ponatur pro quadrato minoris Numeri*, 1q: *& erit quadratum maioris*, 180 *m*. 1q. *Hæc duc inuicem: fiunt* 180q *m*. 1qq, *æqualia* 5184: *id eſt* 1qq *æquale* 180q *m*. 5184. *Extraho Radicem Biquadratam* 180q *m*. 5184, (*eius verò extrahendæ par eſt ratio quæ Quadratæ*): *Minus quadratum erit* 36: *maius verò* 144. *Quapropter duo Numeri, erunt* 6 *&* 12.

Hæc Quæſtio deſumpta eſt ex Propoſitione IIII *ſecundi Elementorum: cuius figurationem hîc ſubiecimus. Vbi linea AB diuiſa eſt fortuitò in puncto C: & Quadratum totum AD, æquale eſt duobus Quadratis AE & ED cum duobus Supplementis*

mentis



mentis C F & E G: reliqua verò ad Quæſtionis ſententiam facile redigentur.

Quæſtio ipſa aliter etiam enunciari poterat. Quippe quum duo Quadrata minora, cuiuſmodi hoc loco ſunt AE & ED, ponantur eſſe 180: *duoque Supplementa BE & EG, quæ cum iiſdem Quadratis duobus, conſtituunt Quadratum totum AD, ſint* 144: *erit ipſum Quadratum AD,* 324: *quorum Radix, eſt* 18. *Quæſtio igitur enunciabitur in hæc verba, Quæruntur duo Numeri, qui ſimul poſiti efficiant* 18: *ducti verò inuicem faciant* 72.

Pro vno numerorum pono 1℞: *alter erit* 18 *m.* 1℞. *Hos duco inuicem: fiunt* 18℞ *m.* 1q, *æquales* 72: *hoc eſt,* 1q *æquale* 18℞ *m.* 72. *Huius Numeri Radix maior, eſt* 18: *minor verò,* 6, *vt modò.*

Poterit & ſic proponi, Duo Numeri ſimul iuncti faciunt 18: *duo verò ipſorum quadrata faciunt* 180.

Vel ſic, Eſt ſuperficies Quadrangula Rectangula, cuius ambo latera angulum continentia faciunt 18: *area verò,* 72. *Quorum deductio ex ſuperioribus manifeſta eſt.*

Quæſtio VIII.

Quæritur Numerus, à cuius Quadrato ſi abſtuleris $\frac{1}{3}$ *&* $\frac{1}{4}$, *& inſuper* 8, *reſiduum verò in ſe duxeris: exurgat Numerus æqualis Quadrato illius numeri qui quæritur, & præterea* 13.

Pro ipſius Numeri quadrato pono 1℞: *à quo aufero* $\frac{1}{3}$ *&* $\frac{1}{4}$ *&* 8: *ſuperſunt* $\frac{5}{12}$℞ *m.* 8. *Hæc duco in ſe, proueniunt* $\frac{25}{144}$ *p.* 64 *m.* 6 $\frac{2}{3}$ ℞, *æqualia* 1℞ *p.* 13: *id eſt,* $\frac{25}{144}$ q, *æquales* 7 $\frac{2}{3}$ ℞

m. 51. *Iam educenda eſt Radix Quadrata* $7\frac{2}{3}$ ℞ *m.* 51. *Sed quoniam* $\frac{25}{144}$ q *Minutus eſt numerus, æquationem commodiùs reducemus ad integram: quod per Regulam Trium ſic abſoluemus, Si* $\frac{25}{144}$ q *æquantur* $7\frac{2}{3}$ ℞ *m.* 51, *cui æquabitur* 1q? *Fient* $\frac{1104}{25}$ ℞ *m.* $\frac{7344}{25}$, *æqualia* 1q. *Extraho igitur Radicem ab hoc numero,* $\frac{1104}{25}$ ℞ *m.* $\frac{7344}{25}$. *Scilicet, dimidium* $\frac{1104}{25}$ *eſt* $\frac{552}{25}$: *quod in ſe ductum, producit* $\frac{304704}{625}$, *à quibus aufero* $\frac{7344}{25}$: *manent* $\frac{3027600}{15625}$. *Horum Radix eſt* $\frac{1740}{125}$: *quam addo ad* $\frac{552}{25}$, *dimidium numeri Radicum: fiunt* $\frac{900}{25}$; *hoc eſt,* 36. *Is eſt quadratus Numerus quem quærebamus. Probatur ſic. A* 36 *aufer* $\frac{1}{3}$ *&* $\frac{1}{4}$, *inſuper* 8: *ſuperſunt* 7: *quæ in ſe ducta faciunt* 49: *ac tantandem efficiunt* 36 *&* 13.

Hanc Quæſtionem proponit Cardanus ex Machomete Arabe: Cuius tamen numeros atque explicandi rationem variauimus: quum alioquin obſcuriùs deducat, & in numerum quadratum irrationalem incidat.

Quæſtio IX.

Duo Duces, quorum vnus milites habuit pauciores 40 *quàm alter,* 1200 *Aureos ſuis vtrinque diuidebant: itáque cecidit, vt qui minore eſſent numero, ſinguli plus* 5 *Aureis acciperent, quàm qui plures. Quot fuerunt vtrinque milites?*

In hac Quæſtionis ſpecie, animaduertendum, ſummam diuidendam habere eam rationem ad numerum qui ex multiplicatione vtriuſque numeri militum producitur, quam habet differentia ſummæ ipſius ad differentiam militum. Idque in Quæſtionibus proportionalibus eſt perpetuũ. Verbi gratia, 6 *ſocij* 24 *Aureos inter ſe diuidunt:* 8 *item ſocij totidem Aureos inter ſe: conſtat* 6 *ſocios plus vno Aureo habituros, quàm* 8 *ſint habituri. Sicut itáque exuperatio hominum, nempe* 2, *dupla eſt ad differentiam ſummæ, nempe ad* 1: *ita* 48, *qui fit ex ductu* 8 *in* 6,

duplus

duplus eſt ad 24, ſummam diuidendam. Idque ideò fit, quòd in huiuſmodi Quæſtionibus, quantitates ſint eiuſdem rationis. Nam 8 ſocij pro rata quiſque portione tantundem accipiunt, quantum 6 ſocij.

His præfatis, quum exuperatio numeri militum, 40, ſit octupla ad ſummæ differentiam, 5: pono pro minore militum numero, 1℞: alter numerus, erit 1℞ p. 40. Duco 1℞ p. 40 in 1℞, fit 1q p. 40℞. Conſtat igitur 1q p. 40℞, eſſe octuplum 1200. Atqui octuplum 1200, eſt 9600: Quo fit ut 1q p. 40 ℞ æquentur 9600: ideſt, 1q æquetur 9600 p. 40℞. Horum Radix, eſt 80: atque is eſt minor militum numerus: alter, 120. Probatio in promptu eſt.

Hanc etiam Quæſtionem ex Machomete inter difficiles proponit Cardanus in ſua Algebra, Cap. de Æquatione Quadrati cũ rebus & numero, ordine ſecundam. Eius verò æquationem paulò longiùs ducit. Neque enim difficilis eſt, adhibito animo ad id quod modò aſtruximus Theorema, quod & ipſe itidẽ aſſcribit. Omnino, huius Quæſtionis ſpeculatio pulchra eſt. Viam enim ad Quæſtiones quaſlibet proportionales explicandas aperit.

Quæſtio X.

Duæ Societates, quarum altera alteram 4. hominibus ſuperat, parem Aureorum ſummam viritim diuidunt. In ſingulos minoris Societatis cedit plus 8 aureis quàm in ſingulos maioris. Aureorum ſumma, 172. Aureis ſuperat vtrunque Sociorum numerum. Quot ſunt Aurei? quot item Socij? Hæc Quæſtio bifariam ſoluitur: eodem ſcilicet ductu, quo ſuperior: tum vniuerſa methodo.

Priori ratione, pono pro minore Societate, 1℞; maior erit 1℞ p. 4: Aureorum verò ſumma, 2℞ p. 175. Quúmque quantitatum differentia, 8, dupla ſit ad differentiam Sociorum:

erit & ſumma Aureorum, 2℞ p. 176, dupla ad id quod producunt duo numeri Societatum inter ſe multiplicati. Duco itaque 1℞ p. 4 in 1℞, proueniunt 1q p. 4℞: quæ æquantur dimidio huius Numeri, 2℞ p. 176: ſcilicet 1℞ p. 88: id eſt, 1q æquatur 88 m. 3℞. Horum Radix, eſt 8, numerus minoris Societatis: maioris, eſt 12. Aureorum verò ſumma, 192. Singulis minoris Societatis cedent 24 Aurei: ſingulis maioris, 16.

Altera explicandæ Quæſtionis ratio hæc eſt. Pono, vt modò, pro minore Societate, 1℞: Erit maior Societas, 1℞ p. 4. Summa verò Aureorum, 2℞ p. 176. Diuido 2℞ p. 176 per 1℞: fit $\frac{\text{1℞ p 176}}{\text{1℞}}$ *: ea eſt portio ſingulorum minoris Societatis. Itidem diuido 2℞ p. 176 per 1℞ p. 4: fit* $\frac{\text{2℞ p 176}}{\text{1℞ p 4}}$*, portio ſingulorum maioru Societatis. Quum itaque* $\frac{\text{2℞ p 176}}{\text{1℞ p 4}}$ *p. 8, æquentur* $\frac{\text{2℞ p 176}}{\text{1℞}}$ *: ablato minore à maiore, erit reliquum æquale 8. Aufer itaquè* $\frac{\text{2℞ p 176}}{\text{1℞ p 4}}$ *à* $\frac{\text{2℞ p 176}}{\text{1℞}}$ *: ſuperſunt* $\frac{\text{8℞ p 704}}{\text{1q p 4℞}}$*, æqualia 8: Et per reductionem, 8q æqualia 704 m. 24℞: hoc eſt, 1q æquale 88 m. 3℞. Huius numeri Radix quadrata, eſt 6, minor: maior verò, 12, vt in priori deductione.*

Quæſtio XI.

Mercator ad nundinas ter profectus, prima negotiatione ſummam Aureorum quam habebat, duplicauit: ſecunda, lucrifecit huius dupli Radicem, ac præterea 2 Aureos: tertia, lucrifecit totius ſummæ quadratum p. 4 Aureis. Tandem 510 Aureos habuit. Quæro quæ fuerit ſors.

Hæc Quæſtio commodius ſoluetur per Reuerſionem ſeu Regreſſionem, hac ratione: Quoniam 510 æquantur ſummæ ex ſecundo commercio confectæ & quadrato eiuſdem, atque inſuper 4 Aureis: pono pro ea ſumma, 1℞: & pro eiuſdem quadrato, 1q: Quæ cum 4 Aureis efficiunt 1q p. 1℞ p. 4 quæ ſunt

æqualia

æqualia 510: id eſt, 1 q æquale 506 m. 1 ℞. Horum radix, eſt 22: Et tantundem ex ſecunda negotiatione habuit. Et quoniam ſecundo hoc commercio lucrifecit Radicem eius, quam detulerat, ſummæ p. 2 Aureis: auferantur 2: ſuperſunt 20. tum ponantur 1 ℞ & 1 q (pro ea ſcilicet quam detulerat ſumma, eiuſque radice) æqualia 20, & erit 1 q æquale 20 m. 1 ℞. Horum radix, eſt 4. Et tantum eſt lucrum ſecundæ negotiationis p. 2. Ablatis itaque 4 & 2 à 22, ſuperſunt 16: ac tanta fuit ſumma quam habuit ſecunda negotiatione. Quæ ſumma, quia duplum eſt eius, quam prima profectione detulerat, ſummæ: habuit initio 8 Aureos.

Hanc etiam Quæſtionem tractat ibidem Cardanus: & in radicem vniuerſaliſſimam incidit: quam nos ad numeros rationales reduximus, poſitis 310 pro 510, ad Quæſtionis argumentum.

DE SECVNDIS Radicibus.

CAP. XXI.

IN iis quæ hactenus exhibuimus Exēplis, vnius Radicis poſitione vſi ſumus. Verùm eæ ſæpe incidunt ſpecies, quæ duplici poſitione opus habent: quum ſcilicet diuerſi numeri proponuntur, inter quos nulla exponitur differentia, ex additione, ſubtractione, proportione, aut notabili quapiam collatione. Veluti, Sint duo numeri, quorum Quadrata iuncta faciunt 340: duo verò numeri inter ſe multiplicati faciunt $\frac{6}{7}$ maioris Quadrati. In hac ſpecie ſi pro vtroque Numero hincinde ponatur 1 ℞ eiuſdem deſignationis: certè progreſ-

ſu calculi, ratio ſic conturbabitur, vt æquationem nullam quæ ex vſu ſit, aſſequi queas. Quo fit, vt pro priore Numero, 1 ℞: pro altero, ſecundam Radicem, eámque diſtinctam ſtatuere ſit neceſſe.

Secundam itaque Radicem hac nota figurabimus, 1 A: tertiam, ſi incidet, 1 B: quartam, 1 C: quintam, 1 D: ac ſic reliquas ordinatim, elementis Alphabeticis. Sed rarò aut nunquam tot poſitionibus vti cogimur.

DE ADDITIONE ET SVBtractione Secundarum Radicum.

CAP. XXII.

IN Additione & Subtractione nihil eſt difficultatis. Nam ſi ſigna fuerint eadem, id eſt, ſi Radices fuerint eiuſdem ordinis: tantùm adduntur numeri abſoluti, aut alter ab altero ſubtrahitur: ſignum verò retinetur. Veluti, 3 A, hoc eſt tres ſecundæ Radices, additæ ad 5 A, faciunt 8 A. Sed 3 A ſutractæ à 5 A, relinquunt 2 A. Quum autem diuerſa fuerint ſigna: tum fit Additio & Subtractio per ſignum p. aut m. Vt 3 ℞ additæ ad 5 A, faciunt 5 A p. 3 ℞. Item 2 A ad 4 B, id eſt, duæ ſecundæ Radices ad quatuor tertias additæ, faciunt 4 B, p. 2 A. Sed 24 ſubtractæ à 4 B, relinquunt 4 B m. 24.

DE MVL-

DE MVLTIPLICATIONE Secundarum Radicum.

CAP. XXIII.

SI Signa fuerint eadem, non aliter fit multiplicatio quàm in primis Radicibus. Vt 1 A in ſe ducta, facit 1 A q: id eſt, vnum Quadratum ſecundum: Item 3 A ductæ in 2 A, faciunt 6 A q: & 3 A q in 2 A faciunt 6 A c: id eſt 6 ſecundos Cubos.

Quum diuerſa fuerint ſigna, vtrunque in producto retinetur. Vt 2 ℞ ductæ in 2 A, faciunt 4 ℞ A: quæ ſic enunciantur, 4 primæ Radices ductæ in vnam ſecundam Radicem. Item 3 A in 9 B faciunt 27 A B: ſcilicet 27 ſecundas Radices in vnam tertiam Radicem ductas.

3 A in ſe Cubicè faciunt 27 A c: hoc eſt, 27 ſecundos Cubos.
2 q in 4 B, faciunt 8 q B: id eſt, 8 q multiplicata per 1 B.
3 A in 3 A q, faciunt 9 A c, hoc eſt 9 ſecundos Cubos.
5 A c in 2 A c, faciunt 10 A ß.

At verò ſit ducendus 1 c in 1 ℞ A q. Vides alterum Numerorum, ſcilicet 1 c, eiuſdem eſſe ordinis cum priore particula alterius, nempe cum 1 ℞. Proinde eorum Exponentes ſimul addendi ſunt. Quia verò ſecunda particula, A q, diuerſa eſt: hæc eadem retinebitur. Itaque 1 c ductus in 1 ℞ A q, facit 1 q q A q: hoc eſt, primum Biquadratum ductum in ſecundum Quadratum. Itaque 1 c ductus in 1 ℞ A q, idem producit atque 1 q A ductum in ſe. Vt, Volo multiplicare 1 A per 1 q A. Vides 1 A c alterius eſſe ordinis ab 1 q. Proinde 1 q retinebitur. Quia verò 1 A c & A, eiuſdem ſunt generis:

1 *A* c *ductus in* 1 *A* (*quod ſecum tacitè infert hoc ſignum* ℞) *faciet* 1 qq. *Exponentes quippe ſunt* 3 & 1. *Quapropter* 1 *A* c *ductus in* 1 q *A*, *tantundem efficit, quantum* 1 ℞ *A* q *ducta in ſe: ſcilicet* 1 q *A* qq.

DE DIVISIONE SECVNdarum Radicum.

CAP. XXIIII.

QVemadmodum in Multiplicatione, Exponentes ſimul adduntur: ita in Diuiſione aufertur alter ab altero. Vt 8 *A* q *diuiſa per* 4 4 q, *faciunt* 2. *Et* 8 *A* c *diuiſi per* 4 *A* c, *faciunt* 2 ℞. *Sed* 8 *A* q *diuiſa per* 4 *A* q, *faciunt* 2 c.

Atque hoc loco animaduerſione dignum, quòd ex permiſtione Radicum Secundarum cum primis, fit tandem vnica ſpecies: Scilicet, Secundæ Rad. in primas tranſeunt, atque è diuersò, quanuis initio diſsimiles & diſtinctæ fuerint.

Ac ne cui mirum ſit quòd 8 c *A* q *diuiſi per* 4 *A* q *nil amplius efficiant, quàm* 8 c *per* 4 *diuiſi: is cogitet ex A* q *diuiſo per A* q, *nil aliud produci, quàm* 1. *Itaque* 8 c *A* q, *diuiſi per* 4 *A* q, *nil aliud producere poſſunt quàm* 2 c 1, *hoc eſt duos Cubos ſemel: Vnitas verò abiicitur tanquam otioſa: manéntque* 2 c.

Amplius, diuido 8 c *A* q *per* 4 c, *fiunt* 2 *A* q. *Breuiter, in Multiplicatione, Signa eiuſdem ordinis ſe augent aut minuunt inuicem, ſed diuerſa retinentur. Vt in poſtremo Exemplo,* 4 c *continentur in* 8 c *A* q *bis: ſed manet A* q *in Indicante: fit enim* 2 *A* q. *Quòd ſi* 8 c *A diuidendi eſſent per* 4 c *A* q, *exirent* 2 *ſemel: quod nil aliud eſt quàm* 2. *Nam in probatione Diuiſionis, quæ per Multiplicationē fit, quum ducimus Indicantem in Diuiſorem, certè ducimus A* q *in* 1: & 2 *in A* c: *ac reponuntur* 8 c *A* q.

DE EXTRACTIONE Radicum Secundarum.

CAP. XXV.

Sit educenda Radix Quadrata ab hoc Numero, 25 Aq. Ea erit 5 A. Vbi animaduertendum, in 1 A, 1B, & ſimilibus, ſemper latêre ſignum Radicis, hoc ſcilicet, ℞. Item, Sit educenda Radix Biquadrata, ab hoc Numero, 16Bqq: ea eſt 2B: ſcilicet 2 tertiæ Radices. Radix verò 3 A q & ſimilium, eſt irrationalis: ſcilicet √ ȼ 3 A q. Quarum explicatio ad proximum librum pertinet.

DE RADICVM SECVNdarum probatione.

CAP. XXVI.

Secundarum Radicum præcepta probantur ex Progreſſionibus Geometricis. Vt ſi probandum ſit ex 2 ȼ multiplicatis per 4 A q qua ratione producantur 8ȼAq. Facio, doctrinæ gratia, Numeros Progreſſionis duplæ eſſe accommodatos ad primas Radices: ſcilicet, 1 ℞ eſſe 2: 1q eſſe 4: & 1 ȼ eſſe 8: ſicque in continuum. Numeros verò Progreſſionis Triplæ ad Secundas Radices pertinere: Scilicet, 1 A eſſe 3: 1 Aq eſſe 9: & 1 Aȼ eſſe 27: ſicque cõtinenter. Tum 2ȼ, erunt 16: & 4 Aq, erunt 39: Iam 16 ducta in 36, efficiunt 576: Et 8 ȼ A q, tantundem. Nam 8ȼ faciunt 64: & 1Aq, facit 9: Iámque 64 in 9 ducta, itidem 569 efficiunt.

DE EXEMPLIS AD SECVNdas Radices pertinentibus.

CAP. XXVII.

Quæſtio I.

IAm verò vt Secundarum Radicum vſum elucidemus, Exemplum illud antè propoſitum repetemus, aliáque nonnulla ex ſelectioribus ſubiungemus.

Quæruntur duo Numeri, quorum Quadrata iuncta faciunt 340: *duo verò ipſi Numeri inter ſe multiplicati, faciunt* $\frac{6}{7}$ *maioris Quadrati.*

Maior Numerus eſt, 1 ℞: *Minor,* 1 *A. Duo Quadrata, erunt* 1q & 1 *A*q: *hoc eſt,* 340 *m.* 1 *A*q, & 340 *m.* 1q. *Duo Numeri inuicem ducti, faciunt* 1 ℞ *A*: *quæ erit æqualis* $\frac{6}{7}$ q. *Quapropter vtraque æquationis parte in ſeipſam ducta, manebit eadem æquatio. Si igitur* 1 ℞ *A eſt æqualis* $\frac{6}{7}$ q: *erit* 1q *A*q, *æquale* $\frac{36}{49}$ q: *Et per reductionem ad integra, erunt* 49 q *A* q *æqualia* 36 qq. *Per reductionem verò ad minimam æſtimationem, erunt* 49 *A*q, *æqualia* 36 q: *ac tandem per Regulam* 3, *erunt* $\frac{49}{36}$ *A*q *æquales* 1q. *Quúmque* 1 *A*q *ſit æquale* 340 *m.* 1q: *erit & ipſum* 1 *A*q *æquale* 340 *m.* $\frac{49}{36}$ *A* q: *Et tranſpoſitis particulis, erunt* 2 $\frac{13}{36}$ *A*q *æqualia* 340. *Diuiſis itaque* 340 *per* 2 $\frac{13}{36}$ *A*q, *exibit æſtimatio* 1 *A*q: *ſcilicet* 144: *æſtimatio verò* 1q, *erit* 196. *Horum Radices ſunt* 12 & 14: *Qui Numeri inuicem ducti, faciunt* 168: *quæ ſunt ſex ſeptimæ huius Numeri,* 169, *ex Quæſtionis præſcripto.*

Quæſtio

Quæſtio II.

Quatuor habent priuatim aureos aliquot: Primus, ſecundus, & tertius, vnà habent 149. (hic excluditur quartus: pro cuius aureis, pono 1℞: eritque omnium ſumma, 149 p. 1℞.) Secundus, tertius, & quartus habent 110 (hic pro aureis primi, pono 1 A, vt ſit omnium ſumma, 110 p. 1 A.) Tertius, quartus, & primus habent 125 (atque hic pro aureis ſecundi, pono 1B: Et erit omnium ſumma, 125 p. 1B.) Quartus, primus, & ſecundus habent 138 (vbi pro aureis tertij, pono 1 C: eritque omnium ſumma, 138 p. 1 C). Quæritur quot aureos quiſque ſibi habeat.

Primùm quoniam 149 p. 1℞ ſunt æqualia 110 p. 1 A: erit per Subtractionem, 1 A æqualis 39 p. 1℞. atque ea eſt portio primi, pro qua poſita fuit 1 A. Deinde quum 149 p. 1 ℞ æquentur 125 p. 1B: erit per ſubtractionem, 1B æqualis 24 p. 1℞. Atque hæc erit portio ſecundi, pro qua poſuimus 1 B. Tertiò quum 149 p. 1℞ æquentur 138 p. 1C: erit 1C æqualis 11 p. 1℞. Atque ea eſt portio tertij, pro qua poſuimus 1 C. Portiones itaque ſingulorum erunt ad hunc ſitum,

I	39 p.	1℞
II	24 p.	1℞
III	11 p.	1℞
IIII		1℞.

Facit additio 74 p. 4 ℞: quæ erunt æqualia 149 p. 1 ℞: hoc eſt, 3 ℞ æquales 75. Quapropter erit 1 ℞, 25, portio ſcilicet quarti. Adde 25 ad 39, fient 64, portio primi, ſcilicet 39 p. 1 ℞. Atque eadem ſupputatione, erit ſecundi portio, 49: tertij, 36. Vides ex huius Quæſtionis deductione Secundas Rad. ſingulatim reſolui in primas per æquationem. Quod in Quæſtionibus ſtatim initio attendere oportet an fieri poſſit. Sic enim calculi difficultates & implicationes vitabimus.

Præter Algebram, hoc loco ſubiiciam generale quoddam præceptum ad huius Quæſtionis & ſimilium explicationem accommodatum. Adde ſummas propoſitas: quod exurgit diuide per numerum vno minorem, quàm ſit hominum numerus. In Indicante prodibit omnium ſumma. Tum peractis ſubtractionibus, colligentur ſingulorum portiones. Vt in Quæſtione proxima, ſummæ fuerunt 149, 110, 125, & 138. adde, fiunt 522: Hæc diuide per 3, numerum vno minorẽ quàm 4: exeunt 174, omnium ſumma. Iam à 174 aufer 149, ſuperſunt 25: Ea eſt quarti portio, eius ſcilicet, qui à ratiocinio excluditur. Aufer 110 ab iiſdẽ 174, ſuperſunt 64, primi portio: ac ſimiliter in reliquos.

Quæſtio III.

Tres habent communiter aureorum ſummam: ſinguli verò aureos aliquot proprios. Primus & ſecundus Equum, cui pretium conſtitutum eſt, ſua vtriuſque pecunia emere poſſunt, ſi modò acceſſerit dimidia pars pecuniæ communis. Secundus & tertius ſuum Equum facere poſſunt, ea quam habẽt, pecunia, ac præterea quinta parte pecuniæ communis. Primus & tertius eundem ſibi comparabunt, ea quam habent, pecunia, atque inſuper tertia parte nummorum communium. Quanta eſt aureorum communium? quanta cuiuſque ſumma? & quanti eſt Equus?

Pono pro pecunia communi 1 ℞: *pro Equi pretio,* 1 *A. Primus itaque cum ſecundo habet* 1 *A m.* $\frac{1}{2}$ ℞, *nempe Equi æſtimationem m. ſemiſſe,* $\frac{1}{2}$, *pecuniæ communis: Secundus & tertius habent* 1 *A m.* $\frac{1}{5}$ ℞: *Primus & tertius habent* 1 *A m.* $\frac{1}{3}$ ℞. *Ex præcepto prioris Quæſtionis adde ſingula, fiunt* 3 *A m.* $\frac{31}{30}$ ℞. *Hæc diuide per numerum vno minorem quàm ſit hominum numerus, ſcilicet per* 2: *exit* 1 $\frac{1}{2}$ *A m.* $\frac{31}{60}$ ℞. *Id verò eſt Equi pretium. Quapropter* 1 *A æqualis eſt* 1 $\frac{1}{2}$ *A m.* $\frac{31}{60}$ ℞. *hoc eſt,* $\frac{1}{2}$ *A æqualis eſt* $\frac{31}{60}$ ℞. *Igitur* 1 *A æqualis eſt duplo, vtpote*

pote $\frac{31}{30}$ ℞. *Iam pro* 1 *A ſume Numeratorem, ſcilicet* 31: *& pro* 1℞, *Denominatorem*, 30: *habebis Equi pretium*, 31, *pecuniæ verò communis ſummam*, 30. *Igitur primus cum ſecundo habuit* 31 *m.* 15, *nempe* 16. *Secundus cum tertio habuit* 31 *m.* 6: *ſcilicet* 25. *Tertius cum primo habuit* 31 *m.* 10. *Ea ſunt* 21. *Porrò quantum quiſque habuerit, ex Theoremate antecedente ſic colliges. Adde has, quas bini habent, ſummas: fiunt* 62: *hæc diuide per* 2, *Numerum vno minorem quàm ſit hominum numerus: exeunt* 31, *ſumma omnium. Tum ſubtrahe* 25 *à* 31: *ſuperſunt* 6; *portio primi: aufer* 21 *à* 31, *ſuperſunt* 10, *portio ſecundi: aufer denique* 16 *à* 31: *ſuperſunt* 15, *portio tertij. Sed abſque hac vltima ſupputatione ſatis conſtabat hæc partitio. Nam quum primus & ſecundus haberent* 31 *m.* 15: *ſumma verò omnium eſſet* 31: *facile exprimebatur ſingulorum portio.*

Quæſtio IIII.

Tres habent priuatim aureorum numerum. Primus cum dimidia parte reliquorum, habet 32: *Secundus cum* $\frac{1}{3}$ *reliquorum, habet* 28: *Tertius cum* $\frac{1}{4}$ *reliquorum habet* 31. *Quanta eſt ſingulorũ portio? Primus habet* 1℞: *ſecundus*, 1 *A*: *tertius*, 31 *m.* $\frac{1℞\ p\ 1A}{4}$. *Quum que primus cum* $\frac{1}{2}$ *aureorum ſecundi & tertij habeat* 32: *is ipſe habet* 32 *m.* $\frac{1}{2}$ *A m.* 15 $\frac{1}{2}$ *p.* $\frac{1℞\ p\ 1A}{8}$. *Habet igitur* 16 $\frac{1}{2}$ *p.* $\frac{1}{8}$ ℞ *m.* $\frac{3}{8}$ *A* (*nam* $\frac{1}{2}$ *A valet* $\frac{4}{8}$ *A.*) *Proinde erũt* 16 $\frac{1}{2}$ *p.* $\frac{1}{8}$ ℞ *m.* $\frac{3}{8}$ *A, æqualia* 1℞. *Et trãſpoſitis partibus, erunt* 16 $\frac{1}{2}$ *æqualia* $\frac{7}{8}$ ℞ *p.* $\frac{3}{8}$ *A*: *Reductione verò ad integra, erunt* 7℞ *p.* 3 *A æquales* 132. (*Scilicet iunge* $\frac{7}{8}$, & $\frac{3}{8}$ *fiunt* $\frac{10}{8}$: *tum* 7 & 3, *fiunt* 10. *Denique per Regulam Trium, ſi* $\frac{10}{8}$ *dant* $\frac{33}{2}$, *quantum dabunt* 10? *fiunt* 132: *Signa verò omittuntur facilitatis cauſa.*) *Nunc videamus quantum habeat ſecundus: Qui ſi receperit* $\frac{1}{3}$ *aureorum primi & tertij, habiturus eſt* 28: *hæ tertiæ partes ſunt* $\frac{1}{3}$ ℞ & 10 $\frac{1}{3}$ *m.* $\frac{1℞\ p\ 1A}{12}$:

hoc eſt, 10 $\frac{1}{3}$ p. $\frac{1}{4}$ ℞ m. $\frac{1A}{12}$: hæc aufer à 28: ſuperſunt 17 $\frac{2}{3}$ p. e $\frac{1A}{12}$ m. $\frac{1}{4}$ ℞, ſeu $\frac{2}{12}$ ℞. Tantundem habuit ſecundus: atque id erit æquale 1 A. Quibus reductis, erunt $\frac{11}{12}$ A p. $\frac{3}{12}$ ℞ æquales 17 $\frac{2}{3}$. Quapropter 11 A p. 3 ℞ æquabuntur 212 (ducendo ſcilicet 17 $\frac{2}{3}$ per denominatorem 12, vt modò in priori Quæſtionis capite.) Tum vtrunque Signorum ad eam æſtimationem reducemus, vt Radices primæ & ſecundæ æquentur ſui ſimilibus iam inuentis. Quare quum 3 ℞ p. 11 A æquentur 212: fiet reductio ad 7 ℞: Quúmque 7 ad 3 rationem habeat duplam ſeſquitertiam, augebuntur 11 ea ratione: atque hac ipſa augebuntur 212: ducto ſcilicet vtroque numero in 2 $\frac{1}{3}$. Tum colligemus 7 ℞ p. 25 $\frac{2}{3}$ A, æquales 494 $\frac{2}{3}$. Sunt igitur 7 ℞ p. 3 A, æquales 132: tum 7 ℞ p. 25 $\frac{2}{3}$ A, æquales 494 $\frac{2}{3}$. Quapropter quum 7 ℞ in vtraque æquatione ſitæ ſint, oportet numerorum differentiam eſſe æqualem differentiæ ſecundarum Radicum. Proinde 22 $\frac{2}{3}$ A æquantur 362 $\frac{2}{3}$. Diuiſis itaque 352 $\frac{2}{3}$ per 22 $\frac{2}{3}$, exibunt 16, æſtimatio 1 A. Ea eſt ſecundi portio. Iam verò pro tertij portione, ponamus 1 B. Quoniam igitur ſecundus cum $\frac{1}{4}$ aureorum primi & tertij, habiturus eſt 28, habétque 16: erit $\frac{1℞ p. 18}{3}$ æqualis 12. Ob id, 1 ℞ p. 8 æquantur 36. Cæterùm primus cum $\frac{1}{2}$ aureorum ſecundi & tertij, habiturus eſt 32. Atque hic ſemus eſt 8 p. $\frac{1}{2}$ B. Quapropter 1 ℞ p. 8 p. $\frac{1}{2}$ æquatur 32: ac per reductionem, erit 1 ℞ p. $\frac{1}{2}$ B æqualis 24. Quúmque 1 ℞ p. 1 B æquales eſſent 36: differentia 36 à 24 (ea eſt 12) æquabitur $\frac{1}{2}$ B. Quare 1 B erit 24. Ac tantundem habuit tertius. Ex quo primi portionem colligemus: propterea quòd ipſe cum $\frac{1}{2}$ aureorum ſecundi & tertij, quam ſcimus eſſe 20, habiturus eſt 23. Habet igitur 12: Paténtque ſingula Quæſtionis nomina. In hac verò expoſitione Cardanum ſecuti ſumus, quam tametſi aliquantò clariorem reddidimus, tamen omnino difficilis & tædioſa eſt. Nos verò alia methodo declarabimus paulò apertiore, quæ erit huiuſmodi,

Primus

Primus habuit 1℞ : *Secundus*, 1*A* : *Tertius*, 1*B* : *Et quia primus cum* $\frac{1}{2}$ *aureorum ſecundi & tertij, habiturus eſt* 32 : *erit* 1℞ *p.* $\frac{1A\ p.\ 1B}{2}$ *æqualis* 32. *Ob id*, 2℞ *p.* 1*A p.* 1*B æquales erunt* 64. *Atque ea ſit prima æquatio. Deinde quia ſecundus cum* $\frac{1}{3}$ *aureorum primi & tertij, habiturus eſt* 28, *erit* 1*A p.* $\frac{1℞\ p.\ 1B}{3}$, *æqualis* 28 : *Ob id*, 1℞ *p.* 1*B p.* 3*A æquabuntur* 84 : *Sitque hæc ſecunda Æquatio. Tertiò, quoniam tertius cum* $\frac{1}{4}$ *primi & ſecundi, habiturus eſt* 31 : *erit* 1*B p.* $\frac{1℞\ p.\ 1A}{4}$ *æqualis* 31 : *hoc eſt*, 1℞ *p.* 1*A p.* 4*B æquales* 124. *Eæ ſunt tres primæ æquationes. Quæ iam ſic exercendæ ſunt, vt ex ipſarum permiſtione, differentias numerorum abſolutorum venari poſsimus, quæ cum ſignis Denominationum congruant. Sic igitur ſtatuo Æquationes,*

I. 2℞ *p.* 1*A p.* 1*B*, *æquales* 64.

II. 1℞ *p.* 3*A p.* 1*B*, *æquales* 84.

III. 1℞ *p.* 1*A p.* 4*B*, *æquales* 124.

Adde ſecundam ad tertiam : exurget quarta æquatio,

IIII. 2℞ *p.* 4*A p.* 5*B*, *æquales* 208.

Hanc ſi cum prima æquatione conferamus, quoniam 2℞ *vtrinque exiſtunt : erit differentia quæ eſt inter* 64 & 208 (*ea eſt* 144) *æqualis differentiæ quæ eſt inter* 1*A p.* 1*B*, & 4*A p.* 5*B*. *Quare ſi abſtuleris* 1*A p.* 1*B à* 4*A p.* 5*B*, *proueniet quinta æquatio hæc,*

V. 3*A p.* 4*B*, *æquales* 144. *Adde primam ad ſecundam : emerget ſexta æquatio,*

VI. 3℞ *p.* 4*A p.* 2*B*, *æquales* 148. *Adde primam & tertiam, prodibit ſeptima æquatio,*

VII. 3℞ *p.* 2*A p.* 5*B æquales* 188. *Adde has duas poſtremas : fiet octaua æquatio,*

VIII. 6℞ *p.* 6*A p.* 7*B æquales* 336. *Tandem vt in duabus poſtremis æquationibus fiat numerus Radicum æqualis, ducatur aliqua ſuperiorum æquationũ, videlicet tertia, in* 6 (*qui numerus*

in VIII *æquatione continetur) hæc nona conficietur æquatio,*

IX. 6℞ *p.* 6 *A p.* 24*B, æquales* 744.

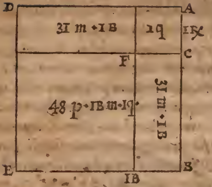
Iam verò quum duo primi numeri Denominati duarum poſtremarum æquationum ſint iidem: erit differentia 336 *&* 744 *(ea eſt* 408*) æqualis differentiæ duorum poſtremorum numerorum,* 7*B &* 24*, quæ eſt* 17*B. Quapropter erunt* 17*B æquales* 408*. Ac proinde* 1*B æqualis eſt* 24*. Et tantundem habuit tertius. Deinde quoniam ex quinta æquatione fuerunt* 3*A p.* 4*B æquales* 144*: pro* 4*B auferamus quater* 24*, ſcilicet* 96*, à* 144*: ſupererunt* 3*A, æquales* 48*: ſicque* 1*A æqualis* 16*. Ea eſt portio ſecundi. Ex quibus colligitur portio primi: propterea quòd ipſe cum* ½ *aureorum ſecundi & tertij (ea eſt* 20*) habiturus erat* 32*. Habuit igitur primus* 12.

Quæſtio V.

Quæruntur duo Numeri, qui ſubtracti à ſuis Quadratis, relinquunt 48*: additi verò ad id quod producitur ex multiplicatione vtriuſque in alterum, efficiunt* 31.

Commodè hòc loco monebimus, Algebram eiuſmodi eſſe, quæ diſciplinarum cognitionem non mediocrem requirat. Neque enim qui Geometriæ imperitus fuerit, etiam ſi Algebræ præcepta didicerit, quæſtionem appoſitè diſſoluet quæ à Geometricis ſpeculationibus pendeat. In hac igitur ſpecie, animum adhibere oportet ad quartam Secundi Elementorum Propoſitionem: Cuius figurationem & ſententiam hìc obiter exponemus.

Linea AB diuiditur fortuitò in puncto C. Totius lineæ quadratum, eſt A B D E, æquale quadratis duarum partium A C & C B, ſcilicet duobus Quadratis A F & F E cum duobus Supplementis B F & F D: quorum vtrunque fit ex ductu A C in C B. Sciendum inſuper, horum Supplementorum vtrũlibet



libet eſſe medium proportionale inter duo Quadrata AF & FE: quod etiam demõſtrauimus ad xxiii Propoſitionem ſexti Elementorum. Proptereà duo quilibet numeri inter ſe multiplicati producunt medium proportionale inter ſua ipſorum Quadrata. Verbi gratia, ſi ducantur 5 in 4: proueniunt 20, medium proportionale inter 16 & 25. Quia igitur Quæſtio propoſita meminit Quadratorum vtriuſque Numeri, atque inſuper producti quod fit ex multiplicatione vtriuſque in alterum: conſtat eiuſmodi productum, quodcunque tandem futurum ſit, medium proportionale eſſe inter duo ipſorum Quadrata.

His ad hunc modum expoſitis, pono pro priore Numero, 1℞: pro altero, 1A: pro additione amborum, 1B. (Hoc enim ad rem pertinet, quum in Quæſtione fiat mentio huius additionis). Quadratum 1℞, eſt 1q: quadratum verò ſecundi Numeri, eſt 1A q. Sed danda opera vt quàmpauciſſima ſigna retineamus, numeros verò introducamus. Horum enim auxilio, numeri abſconditi deteguntur. Quoniam igitur 1B ponitur pro aggregato duorum quos quærimus, numerorum, quod aggregatum ab amborum quadratis ſubtractum, relinquit 48: commodè duo ipſa Quadrata ſic deſignabimus, 48 p. 1B. Quapropter quum prius Quadratum ſit 1q, erit ſecundum Quadratum 48 p. 1B m. 1q. Supplementum verò ſeu medium proportionale, ſic notabitur, 31 m. 1B: quum aggregatum duorum numerorum, quod eſt 1B, additum ad id quod fit ex ductu amborum inter ſe Numerorum,

I

faciat 31, *ex Quæſtionis propoſito. Iam verò ex ipſa Secundi Elemẽtorum quarta Propoſitione, conſtat aggregatum duorum Quadratorum, quod eſt* 48 *p.* 1*B*, *vnà cum duobus Supplementis, quæ ſunt* 62 *m.* 2*B*, *æquari Quadrato ipſius* 1*B*, *nempe* 1*B*q. *Proinde per reductionem, erit* 1*B*q *æquale* 110 *m.* 1*B*. *Horum Radix non aliter inquiretur, quàm ſi æquatio eſſet* 1q & 110 *m.* 1℞. *Scilicet, ſumetur dimidium Numeri Radicum: quod addetur & ſubtrahetur per regulam extractionis. Eritque Radix,* 10. *Quum igitur,* 1*B ſit* 10: *Supplementum, quod eſt* 31 *m.* 1*B*, *erit* 21. *Ambo verò Quadrata, ſcilicet* 48 *p.* 1*B*, *erunt* 58. *Igitur ſecundum Quadratorum, quod eſt* 48 *p.* 1*B m.* 1q, *erit* 58 *m.* 1q. *Et quia* 21 *eſt medium proportionale inter* 1q & 58 *m.* 1q: *ſi duxerimus* 1q *in* 58 *m.* 1q, *erit productum, nempe* 58q *m.* 1qq, *æquale Quadrato* 21, *quod eſt* 441: *hoc eſt* 1qq *æquale* 58q *m.* 441. *A quibus primùm educenda Radix Quadrata* (& *ea erit duplex, propter ſignum m. ſcilicet maior,* 49: *minor verò,* 9) *deinde ab his duobus numeris ſumpta Radice Quadrata, maior Numerorum quæſitorum, erit* 7: *minor verò,* 3. *Hactenus Numeros Denominatos explicauimus. Nunc ad Irrationales tranſeamus.*

IACOBI PELETARII CENOMANI DE OCCVLTA PARTE NVMERORVM, quam Algebram vocant, Liber ſecundus.

De Numeris Irrationalibus in vniuerſum.

CAPVT PRIMVM.

IRrationales Numeri, ſunt Radices numerorum Rationalium, eorum ſcilicet qui veras Radi. non habent. Vt √q 2: *quæ ſic enunciatur, Radix Quadrata Binarij vel duorum:* √ce 7, *Radix Cubica* 7. *Irrationales dicuntur, quòd nullam ad numeros abſolutos rationem habeant: Vulgò Surdi, propterea quòd quum enunciantur, neque quanti, neque quales ſint intelliguntur. Tales igitur erunt quibus præponentur hæc ſigna,* q, ce, qq, ß, qce, *atque id genus reliqua: Quanuis ipſa nonnunquam ſigna Rationalibus numeris præponantur. Vt quum* √q 4, *aut* √ce 8 *dicimus. Quippe Quaternarius Radicem Quadratam: & Octonarius, Cubicam habet. Id autem vſu venit, quum Rationales numeros ſimul cum Irrationalibus tractare conuenit. Ac quemadmodum in abſolutorum opere, Integra ad Minutias reducimus quò commodiùs inter ſe concilientur: ſic, numeros Rationales in Irrationales conuertimus, ita vſu exigente ad vtrorunque commercium. Quæ enim ſunt irrationabilia, ſuam ſpeciem exuere nunquam poſſunt: Rationabilia, poſſunt. Huc accedit quòd eius commutationis adminiculo, pulchrè probantur Irrationalium præcepta, ſicut poſteriùs docebimus.*

NVMERI IRRATIONALES ſintne Numeri, an non & cuiuſmodi ſint.

CAP. II.

Dubitatum eſt de numeris Irrationalibus, vtrum ſint Numeri, an non. Etenim Numerorum naturam non ſapiunt: quum nullam ex ſe proportionem aut quantitatem indicent, quod proprium eſt Diſcretorum: ſed quicquid præ ſe ferunt, id tanquam in perpetuis tenebris deliteſcit. Attamen numeros Irrationales planè pro nullis non habebimus. Conſtat enim eorum non modò eſſe aliquem, ſed etiam neceſſariũ vſum: præſertim in Continuorum dimenſionibus. Quæ enim pleraque in Geometricis traduntur, euidentiam cum Numeris participant, qui ferè vbique Irrationales occurrunt. Ii præterea præceptiones admittunt, non alias quàm qui Rationales ſunt: Additionem ſcilicet, Subtractionem, cateráſque Regularum ſpecies quæ in Abſolutis docentur. Habent igitur numeri Irrationales cum Abſolutis obſcuram quandam mutámque communicationem, non ſecus quàm cum hominibus, Bruta: quæ præter id quòd ſentiunt, ſuo etiam modo ratiocinantur. Inſuper cum Integris conueniunt, quòd ex ductu Irrationalis in Irrationalem, proueniat Rationalis. Nam quum duxeris √q 6 in ſe, proueniet √q 36: ea vero ſunt 6. Ad hæc, fractorum naturam in eo retinent, quòd quemadmodum inter duos numeros continentes, infinitæ minutiæ, ſic & infiniti numeri Irrationales interueniũt. Veluti inter 2 & 3, fractorum ordo eſt, 2, $2\frac{1}{2}$: $2\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{3}$: $2\frac{1}{4}$, $2\frac{3}{4}$: $2\frac{1}{5}$, $2\frac{2}{5}$, $2\frac{3}{5}$, $2\frac{4}{5}$: $2\frac{1}{6}$: $2\frac{5}{6}$: $2\frac{1}{7}$, $2\frac{2}{7}$, $2\frac{3}{7}$, $2\frac{4}{7}$, $2\frac{5}{7}$, $2\frac{6}{7}$: ac ſic infinitè: vt inter 2 & 3 vltimus dari non poſſit. Ordo verò Irrationaliũ inter eadem 2 & 3, eſt, 2, √q 5, √q 6, √q 7, √q 8: √c 9, √c 10, √c 11, √q 12, √c 13, √c 14, √c 15, √c 16, √c 17: ſicque per Cubos ad 27 vſque: tum √qq 17, √qq 18, √qq 19, √qq 20, √qq 21, √qq 22, √qq 23, √qq 24, √qq 25, ac continenter per qq, donec ad 81 peruentum ſit.

Denique

Denique quot ſignorum ſunt ſpecies (eæ verò ſunt infinitæ) tot numeri Irrationales exiſtunt inter 2 & 3: inter 4 & 5: inter 6 & 7, denique inter duos quoſlibet numeros contiguos. Summa verò hæc ſit, vt ij Numeri inexplicabiles quum ſint, neque Diſcretorum naturam, ſed vmbram duntaxat referant, inter Numeros locum non teneant, ſed intra numerorum Irrationalium appellationem contineantur.

DE IRRATIONALIVM quinque ſpeciebus.

CAP. III.

*N*vmerorum Irrationalium quinque ſunt ſpecies; Simplicium, Compoſitorum, Diminutorum (qui à nonnullis Tanquamcompoſiti vocantur), Vniuerſalium compoſitorum, & Vniuerſalium diminutorum.*

Simplices Irrationales vulgò Mediales dicuntur, quòd eorum officio inter duos numeros Rationales non quadratos medium proportionale reperiatur. Horum tot ſunt ſpecies, quot Radicum. Vt √q6, √c7, √qq8, √ß9, √qc10, ac ſic deinceps.

Compoſiti Irrationales, ſunt quos ſignum Pluris intercipit: cuius officio, ex duobus ſimplicibus vnus efficitur Compoſitus. Vt √q6 p. √q18. Horum duæ ſpecies: Prior Bimedialium, qui duobus Medialibus conſtant: vt √q8 p. √q3. Atque horum quidam ſunt non quadrati, vtplerique omnes, vt Binomia tertiæ & ſextæ ſpeciei. Altera ſpecies Compoſitorum, eſt eorum qui Rationali & Irrationali conſtituuntur. Horum itidem alij non quadrati: vt 10 p. √q6, item √q12 p. 7: &

ſimiles: alij Quadrati: vt Binomium primum, ſecundum, quartum, & quintum.

Binomia verò ab Euclide ſex ponuntur, Primum ex maiore particula Rationali, minore verò Irrationali: vt 8 p. V q 48: Secundum, ex maiore Irrationali, & minore Rationali: vt V q 48 p. 6. Tertium, quod ex vtroque Irrationali: vt V q 50 p. V q 32. Quartum rurſus ex maiore Rationali & minore Irrationali: vt 24 p. V q 552. Quintum, ex maiore Irrrationali & minore Rationali: vt V q 9 p. 8. Sextum, ex vtroque Irrationali: vt V q 48 p. V q 28. Quorum vnumquodque eſt Quadratum, ſuáſque habent Radices, ſicut ſuo loco docebimus.

Diminuti Irrationales, ſunt quibus ſignum Minoris interponitur. Quorum, ſicut & Compoſitorum, duæ ſunt ſpecies, quæque à ſuis Compoſitis ſola pluris & minoris nota diſtinguuntur. Prior Bimedialium non quadratorum: vt V q 8 m. 3: & item quadratorum, nempe Reſiduorum tertiorum & ſextorum, (nam vnumquodque Binomium, ſuum habet Reſiduum ſeu Apotomen eiuſdem proprietatis,) vt V q 50 m. V q 32, Reſiduum tertium: item V q 48 m. V q 28, Reſiduum ſextum. Altera ſpecies Diminutorum, eſt ex iis quæ rationali particula & irrationali conſtant, atque horum rurſus, vt Compoſitorum, quidam non quadrati, vt 10 m. V q 6: item V q 12 m. 7, & ſimiles. Quidam quadrati: vt 8 m. V q 48, Reſiduum primum: V q 48 m. 6, Reſiduum ſecundum: 24 m. V q 552, Reſiduum quartũ: & V q 96 m. 8, Reſiduũ quintum.

Vniuerſales Compoſiti ſunt, quibus ſignum vniuerſe præponitur. Fit, quum ſignum ambas numeri particulas afficit. Atque ob id à quibuſdam vocantur Radices Vniuerſales. Signum verò Vniuerſale puncto diſtinguitur ab ipſis particulis, vt V q. 12 p. V q 6: quæ ſic enunciatur, Radix vniuerſalis, 12 p. Radicis quadratæ 6. Item, V q. V q 24 p. V q 8: id eſt, Radix

Vniuer-

Vniuerſalis Radicis 24 p. Radicis 8. Item, ℣q. ℣q 12 p. ℣q 5, Radix vniuerſalis Radicis 12 p. Radicis 5. Compoſiti verò Vniuerſales vnà cum ſuis Diminutis faciunt Radices Binomiorum quarti, quinti, & ſexti, vt poſteriùs dicturi ſumus.

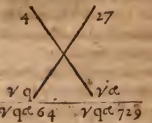
Reliquas verò ſpecies Irrationalium Compoſitorum, qualia ſunt Trinomia, & quæ vocant Quadrinomia, & cætera deinceps, conſultò omittimus: vt quorum nullus, quòd ſciam, extet vſus: quanuis eorum etiam ars conſtitui poſſit.

DE REDVCTIONE IRRATIOnalium ad idem ſignum.

CAP. IIII.

QVemadmodum inter Minutias Abſolutorum neque Additio neque Subtractio commodè fieri poteſt, niſi priùs Minutiis ipſis ad eandem denominationem reductis: ſic Mediales diuerſi, reductione ad idem ſignum opus habent, vt inter ipſos Additio & Subductio fiat. Hæc autem reductio ab illa non multùm diſcrepat. Scilicet, Numeros abſolutos alterum alteri ex aduerſo ſcribe, & vtrique ſuum ſignũ ſubiice. Tum duo ſigna ſimul iunge, hoc eſt, ipſorum Exponentes, vt priore libro docuimus: habebis ſignum commune. Deinde vtrunque abſolutorum multiplica decuſſatim, ea quam ſigna tranſuerſa indicant, multiplicatione. Vtrique producto præpone ſignum commune: fient duo numeri eadem inter ſe ratione qua priores. Exemplum.

Volo reducere ℣q 4 & ℣c 27 ad idem ſignum. Statuo vtrunque ad normam quam vides,



Addo √q ad √c: fit √qc, ſignum commune: Tum multiplico 4 cubicè, ſicut oſtendit ſignum √c, per decuſſim reſpiciens 4: fiunt 64: hæc ſubucio loco 4. Deinde multiplico 27 quadratè, ſicut monſtrat ſignum √q, fiunt 72[illegible]: hæc ſubſtituo loco 27. Demum vtriqueproductorum præpoſito ſigno communi, fiunt √qc 64 & √qc 729: quæ eandem retinent rationem inter ſe, quam √q 4 & √c 27. Numeros verò rationales adhibuimus, quò clarior eſſet probatio: quod ferè impoſterùm obſeruabimus.

Sed & hoc negotium compendio abſolui poterit, quum vterque abſolutorum eam habebit radicem quam ſignum ipſum præ ſe fert. Tunc enim educta radice ab ipſo numero, atque eiuſdem loco ſubdita, ſignum deletur. Vt √qß 1024, & √qc 216. Educo radicem Superſolidam à 1024: ea eſt 4: ac deleto ſigno ß, supereſt √q 4. Deinde extraho radicem Cub. 214: ea eſt 6: Deletóque ſigno, c, manet √q 6. Habeo itaque √q 4 & √q 6 eodem notatas ſigno, atque eiuſdem inter ſe rationis cum √qß 1024 & √qc 216.

Poteſt etiam compendium fieri, accerſito ſigno ad numerum abſolutum quod ipſe non habet, ſcilicet multiplicando alterum numerorum per ſignum alterius. Vt √qc 4096 & √c 8 (ea ſunt 4 & 2) quia ſignum q, priori, non etiam poſteriori numero adiacet, Multiplico 8 quadratè, fiunt 64, quibus præpono ſignum qc. Eruntque √qc 4096 & √qc 64 eiuſdem deſignationis: atque inter ſe ſic habebunt, vt √qc 4079 & √c 8.

DE COGNOSCENDIS MEDIAlibus ſintne commenſurabiles an non, & qua inter ſe ſint proportione.

CAP. V.

Diuide maiorem abſolutum per minorem: vnde ſi exierit numerus, qui eam radicem habeat quàm ſignum Medialium oſtendit: erunt duo Mediales commenſurabiles: Sin minus, incommenſurabiles. Vt √q 18, *&* √q 8. *Diuide* 18 *per* 8, *exeunt* $2\frac{1}{4}$: *quorum Radix eſt* $\frac{3}{2}$: *Sunt igitur* √q 18 *&* √q 8 *inter ſe commenſurabiles, proportione ſcilicet ſeſquialtera. Item* √q 75 *&* √q 48. *Ex diuiſione* 75 *per* 48, *fit* $1\frac{9}{16}$: *cuius radix,* $\frac{5}{4}$. *Quare* √q 75 *ad* √q 48, *proportionem habet* $\frac{5}{4}$, *id eſt, ſeſquiquartã. Item* √q 320 *&* √q 135. *Diuiſis* 320 *per* 135, *exeunt* $2\frac{10}{27}$: *quorum Rad. Cub.* $\frac{4}{3}$. *Eſt itaque proportio ſeſquitertia. At* √q 48 *&* √q 8 *commenſurabiles non ſunt, quum ex diuiſione* 48 *per* 8 *fiant* 6, *quorum nulla eſt Radix. Item neque* √c 32 *&* √c 18. *Ex diuiſione enim indicatur* $1\frac{7}{9}$: *qui numerus quanuis Radicem quadratam habeat: tamen quia Cubicam non habet, fit vt* √c 32 *&* √c 18 *ſint incommenſurabiles. Horum cognitio facit ad Medialium Additionem & Subtractionem. Proportio enim in vtraque eſt neceſſaria, vt proximè docebimus.*

DVOS MEDIALES IN PROportione nominata reperire.

CAP. VI.

DVos proportionis indices quadra: ambo quadrata duc in propoſitum quempiam numerũ, ſed non quadratum: vtrique producto præpone ſignum quadratorum: erunt duo numeri in ea quæ data eſt, proportione. Veluti, Sint inueniendi duo Mediales in proportione $\frac{5}{3}$, *ſuperbipartiente tertias: Quadro 5 & 3, fiunt 25 & 9: Horum vtrunque duco in numerum quenlibet non quadratum, verbigratia, in 7: proueniunt 175 & 63: Quorum vtrique præpono ſignum Quadratorum: fiunt √q 176, & √q 63, in proportione* $\frac{5}{3}$ *propoſita. Item, Volo duos Mediales in proportione* $\frac{6}{5}$: *Quadro 6 & 5: proueniunt 36 & 25. Tum multiplico vtrunque per numerum non quadratum, vt per 10, fiunt 360 & 250, in proportione* $\frac{6}{5}$. *Quòd ſi duo Mediales Cubici in proportione quapiam oblata ſint reperiendi, ducemus numeros proportionis in ſe cubicè: tũ vtrunque Cubum multiplicabimus per numerum quenlibet non Cubum: vtrique producto præponemus ſignum Cubicum. Vt, volo duos Mediales Cubicos in proportione* $\frac{3}{2}$: *Duco* $\frac{3}{2}$ *ad Cubum, fiunt* $\frac{27}{8}$: *hæc duco in vnum quempiam numerum non Cubum, vt in 4: proueniunt 104 & 32: quibus præſcribo ſignum Cubicum: fiunt √c 104 & √c 32, proportione inter ſe* $\frac{3}{2}$. *Cuius probatio conſtat, diuiſis 104 per 32, vnde exeunt* $\frac{27}{8}$: *quorum Radix Cubica, eſt* $\frac{3}{2}$.

DE ME-

DE MEDIALIVM ADDITIONE.

CAP. VII.

SI Mediales fuerint incommenſurabiles, eorum addendorum alia ars nulla eſt quàm per ſignum Pluris. Vt, √q 12 addita ad √q 5, facit √q 12 p. √q5.

Commenſurabiles verò ſic addes. Proportionis numeros ſimul iunge: ex horum aggregato fac Numeratorem, ſubſcripto maiore ipſorum in Denominatorem: Tū ambos, Numeratorem ſcilicet & Denominatorem, duc ad quadratum (vel ad Cubum, pro ſignorum Medialium indicatione), per quadratum Numeratoris multiplica numerum abſolutum minoris Medialis: productū diuide per quadratum Denominatoris: numero Indicanti, quem Quotientem vocant, præpone ſignum Mediale: numerus Additionis. Fiet Exemplum. Volo addere √q 8 ad √q18. Horum proportio eſt $\frac{3}{2}$. Iungo 3 & 2, fiunt 5, Numerator: cui ſubſcribo 2 in Denominatorem, hoc ſitu, $\frac{5}{2}$. Duco $\frac{5}{2}$ ad quadratum (ſunt enim ſigna Medialia quadratorum) fiunt $\frac{25}{4}$. Per 25 multiplico 8, numerum minoris Medialis, proueniunt 200: hæc diuido per 4, Denominatorem: exeunt 50: Quibus præpono ſignū Mediale, q: fit √q 50, ſumma Additionis √q 8 ad √q 18. Item, Volo addere √q 2 ad √q 8. Proportio eſt $\frac{2}{1}$. Iungo 2 & 1, fiunt 3 (atque hoc loco nihil attinet Denominatorem ſubſcribere: ſicut nec in quibuſuis Denominationibus proportionū multiplicibus: Vnum quippe neque multiplicationem neque diuiſionē variat.) Hæc 3 duco ad quadratum, fiunt 9: per 9 multiplico 2, numerum minoris Medialis: proueniunt 18: quibus præſcribo ſignum Mediale Quadratum: fit √ q 18, numerus Additionis √ q 2 ad √ q 8.

Poterit etiam maior numerus proportionis ſubſcribi in Denominatorem: atque in idem recidet: modò tamen per quadratum maius multiplicemus numerum maioris Medialis, productum diuidamus per quadratum minus. Vt in primo Exemplo, √q 8 ad √q 18, quorum proportio eſt $\frac{2}{3}$, *ſic ſtabunt numeri,* $\frac{5}{3}$. *Duco* $\frac{5}{3}$ *ad quadratum, fiunt* $\frac{25}{9}$: *tum per 25 multiplico 18, proueniunt 450. hæc diuido per 9, exeunt 50: quibus præpoſito ſigno Quadratorum, fit √q 50, vt priùs. Hoc ideò fit, quòd maior numerus proportionis, maiorem Medialem reſpiciat: minor verò minorem.*

Item, Volo addere √c 8 ad √ 27 (ea ſunt 2 & 3) Horum proportio eſt $\frac{3}{2}$: *Iungo 3 & 2, fiunt 5: his ſubſcribo 2, fit* $\frac{5}{2}$: *Duco* $\frac{5}{2}$ *ad Cubum, fiunt* $\frac{125}{8}$: *per 125 multiplico 8, proueniunt 1000: Hæc diuido per 8, Denominatorem: redeunt 125: quibus præpono ſignum Cubicum: fit √c 125, numerus Additionis.*

Animaduerte, non fuiſſe neceſſariã multiplicationẽ per 8, vt poſtea per 8 fieret diuiſio. Nam, vt obiter moneã, quum idem fuerit Denominator quæ eſt abſoluta particula quam ipſe reſpicit, nil aliud quàm multiplicabimus quadratè aut cubicè, vt patet ex poſtremo Exemplo.

Hæc eſt addendorum Medialium ratio noſtra. Cæteri, inter quos Stifelius, Multiplicationem Additioni anteponunt, præpoſtero docendi ordine.

DE MEDIALIVM SVBTRACTIONE.

CAP. VIII.

MEdiales incommenſurabiles, ſolo ſigno Minoris ſubtrahũtur alter ab altero. Vt √q 5 ſubtracta à √q 12, relinquit √q 12 m. √q 5. Ratio enim Additionis & Subtractionis eadem.

Commen-

Commenſurabilium verò Subtractio ſic fit. Amborum proportionem inquire, vt in Additione: Numerum proportionis minorem aufer à maiori: ex reliquo fac Numeratorem, ſubſcripto minore proportionis numero, in Denominatorem. Vtrunque, Numeratorem ſcilicet & Denominatorem, quadra (vel cubica proue indicabit ſignum Mediale): per Quadratum (vel Cubum) multiplica numerum abſolutum minoris particulæ: productum diuide per Quadratum (vel Cubum) Denominatoris: Numero Indicanti præſcribe ſignum Mediale: fiet numerus Subtractionis. Exemplum. Volo ſubtrahere √q8 *à* √q50: *Harum proportio, eſt* $\frac{5}{2}$: *aufero* 2 *à* 5: *manent* 3, *Numerator: cui ſubſcribo* 2, *fit* $\frac{3}{2}$. *Iam quadro* $\frac{3}{2}$, *fiunt* $\frac{9}{4}$: *per Numeratorem*, 9, *multiplico numerum minoris Medialis*, 8, *proueniunt* 72: *hæc diuido per Denominatorem*, 4, *exeunt* 18: *quibus præpono ſignum Mediale: fit* √q18, *numerus Subtractionis* √q8 *à* √q50. *Item, volo ſubtrahere* √q2 *à* √q32. *proportio eſt* $\frac{4}{1}$: *aufero* 1 *à* 4, *manent* 3: *quadro* 3, *fiunt* 9 (*Denominatorem hîc nihil attinet quadrare*): *per* 9 *multiplico* 2, *numerum minoris Medialis, fiunt* 18 (*nec verò diuido, quum vnum nihil mutet*): *quibus præpono ſignum Mediale, fit* √q18, *numerus ex Subtractione* √q2 *à* √q32 *reliquus.*

Item, volo ſubtrahere √c27 *à* √c216 (*ideſt*, 3 *à* 6). *Proportio eſt* $\frac{2}{1}$. *Atque hoc loco neque multiplicandum neque diuidendum: ablato enim Vno à binario, manet* 1. *Igitur ablata* √c27 *à* √c216, *manet eadem* √c27. *Examen. Additio & Multiplicatio altera alteram probant. Vt in penultimo Exemplo, ſi addideris* √q2 *ad* √q18, *redibit* √q32: *Si verò abſtuleris* √q18 *à* √q32, *reliqua fiet* √q2. *Et in vltimo, ſi addideris* √c27 *ad ſeipſam, proueniet* √c216.

Duplicatio.

In Duplicatione tantùm additur numerus ad ſeipſum. Quare quenlibet numerum Medialem Quadratum duplicaueris, ſi in 2, hoc eſt, in √q 4, duxeris: Medialem verò Cubicum in √cc 8. Scilicet geminaueris √cc 27, ſi in √cc 8 duxeris. Sed hæc ſatis clara ſunt.

DE MEDIALIVM MVLTIplicatione & Diuiſione.

CAP. IX.

M*Vltiplicatio & Diuiſio Medialium nihil habent difficultatis: Tantùm multiplicantur numeri abſoluti inter ſe, aut diuiduntur, relicto eodem ſigno. Vt √q 9 ducta in √q 4, facit √q 36. Item √q 3 per √q 12, facit eandem √q 36.*

Exemplum Diuiſionis. √q 36 diuiſa per √q 4, facit √q 9. Item √q 12 per √q 3, facit √q 4. Et √cc 72 diuiſa per √cc 9, facit √cc 8.

Conſtat igitur, ex multiplicatione Irrationalium inter ſe, produci numerum Rationalem, vt antea meminimus.

Si per numeros abſolutos fuerint Mediales diuidendi aut multiplicandi, vel econtrariò: priùs ex abſoluto faciemus Medialem. Vt ſi multiplicanda ſint 8 per √q 2, priùs ex 8 fient √q 64: tum ex multiplicatione proueniet √q 128. Si verò eadem 8 fuerint diuidenda per √q 2: fiet ex Diuiſione, √q 16. Atque hic locus ad Medialium Compoſitorum præceptionem, quæ huic tractationi proxima eſt, pertinet.

DE MEDIALIVM MVLTIPLIcatione Quadrata, Cubica, & reliquis id genus.

CAP. X.

Mediales in ſe ducuntur quadratè aut cubicè, multiplicando numerum abſolutum in ſe, pro ſigni ipſius appellatione. Sed hoc nil aliud eſt quàm ſignum ipſum multiplicationem indicans delere. Vt √q 8 in ſe quadratè, facit √q 64 : id eſt, 8. Item √c 12 in ſe cubice, facit √c 1728, id eſt 12.

Sed √q 8 cubicè, facit √q 512.

√qc 6 quadratè, facit √qc 36, id eſt, √c 6. Eadem verò cubicè, facit √qc 216, hoc eſt, √q 6.

INTER DVOS NVMEROS datos medium proportionalem reperire.

CAP. XI.

Cum iam antè meminerimus, Mediales numeros ad media proportionalia reperienda accommodari: id quánam ratione fiat, huic loco non erit alienum oſtendere.

Si inter duos numeros vnus ſit reperiendus medius proportionalis, primam nobis ſpeciem Medialium accommodabimus, nempe Quadratorum. Si duo medij ſint inueſtigandi,

ſecundam ſpeciem eorundem, ſcilicet Cubicam: Si tres, tertiam, nempe Biquadratam: ſicque continenter.

Sint itaque, Exempli cauſa, inter 8 & 24 *quinque numeri medij proportionales inquirendi. Diuido* 24 *per* 8, *exeunt* 3. *Hæc erit radix, ſeu origo Progreſsionis Geometricæ ab vno ductæ, atque ad ſeptimum vſque locum continuatæ: quæque tot loca intermedia habeat, quot ſunt numeri medij reperiendi, ſcilicet quinque numeros, inter duos extremos. Progreſsio verò erit hæc,*
1, 3, 9, 27, 81, 243, 729. *Tum vnicuique huius Progreſsionis numero præſcribo ſignum quintæ ſpeciei, ſcilicet Quadraticuborum: itáque ſtabunt numeri,* √qc 1, √qc 3, √qc 9, √qc 27, √qc 81, √qc 243, √qc 729. *Tertiò ab horum vnoquoque educo Radicem quam indicat cuiuſque ſignum, ſi modò eam habet: Quare tertia erit constitutio huiuſmodi,* 1, √qc 3, √c 3, √q 3, √qc 9, √qc 243, 3. *Hos tandem numeros ſingillatim multiplico per* 8, *minorem extremorum inter quos medij ſunt reperiendi. Ac confectus multiplicationibus, erit Progreſsio peracta, eiúſque duo extremi numeri* 8 & 24: *quinque vero medij, inter ipſos erunt preportionales, ad hunc modum,*
8, √qc 786432, √c 1536, √q 192, √c 4608, √qc 191102976, 24. *Probatio ex lege Proportionalium pendet. Verbi gratia, Exploraturus an* √qc 789432 *ſit medium proportionale inter* 8 & √c 1536, *duc* √c 1536 *in* 8, *hoc eſt, in* √c 512: *fit* √c 786432: *hinc extrahe radicem quadratam: ea eſt* √qc 786432. *Alias ſpecies ſimiliter probabis.*

DE

DE NVMERIS IRRATIONAlibus Compoſitis & Diminutis.

Additio & Subtractio Irrationalium Compoſitorum & Diminutorum.

CAP. XII.

NVmeri Compoſiti & Diminuti, vt antè docuimus, alij duabus particulis irrationalibus conſtant: alij rationali ſimul cum irrationali. Horum Additio & Subtractio miſta eſt ex Abſolutorum & Medialium præceptionibus: illorum, ex his tantùm. Vtriuſque igitur Exempla ſubiicere ſatis fuerit.

Additionis formulæ.

I.	II.	III.
9 *p.* √q 24	√q 180 *p.* √q 48	√c 216 *m.* √qq 405
7 *p.* √q 6	√q 125 *p.* √q 27	√c 64 *m.* √qq 80
16 *p.* √q 54.	√q 605 *p.* √q 147.	√c 1000 *m.* √qq 3125.

IIII.

√qq 256 *m.* √c 27
√qq 81 *p.* √c 8
√qq 2381 *m.* √c

In vltima Additionis formula, vides ſigna diuerſa Plus & Minus in poſterioribus particulis: atque ob id, loco Additionis fit Subtractio: ſcilicet √c 8, ſubtrahitur à √c 27, & retinetur ſignum maioris Numeri. Cuiuſmodi etiam ſunt duæ quæ ſequuntur, Additiones.

V.	VI.
√q 75 p. 2	√q 75 m. 2
√q 12 m. 3	√q 12 p. 3
√q 147 m. 1.	√q 147 p. 1.

Subtractionis formulæ.

I.	II.
16 p. √q 54	√q 605 p. √q 147
9 p. √q 6	√q 180 p. √q 48
7 p. √q 24.	√q 125 p. √q 27.

III.	IIII.
√c 1000 p. √qq 3125	√qq 2381 m. √c 1
√c 216 m. √qq 405	√qq 256 m. √c 27
√c 64 m. √qq 80.	√qq 81 p. √c 8.

In vltima formula vides ſubtrahendam eſſe √c 27 à √c 1, maiorem à minori: ob id, ſignum m. conuertitur in plus. Item, in hac quinta formula, quum in duabus primis particulis ſigna ſint eadem, & numerus maior à minore ſit ſubducendus: ſuperior ab inferiore ſubtrahitur, ſignumque p. in m. conuertitur.

V
√q 50 p. 8
√q 72 m. 3
11 m. √q 2.

In duabus autem poſtremis, vbi ſigna ſunt diſsimilia, retinetur ſignum numeri ſuperioris, idque ex lege ſignorum Plurꝰ & Minoris, priore libro à nobis tradita.

VI.	VII.	VIII.
√q 72 p. 2	√q 72 m. 3	27 m. √q 72
6 p. √q 18	9 m. √q 50	√q 50 p. 8
√q 18 m. 4.	√q 242 m. 12.	19 m. √q 242.

MVL-

MVLTIPLICATIO IRRATIOnalium Compoſitorum & Diminutorum.

CAP. XIII.

Omnes multiplicandi numeri particulas duc in ſingulas multiplicantis. Vt in ſubiecta formula, quæ numeris rationalibus conſtat.

9 m. √q 16
7 m. √q 9
63 p. √q 144
m. √q 784 m. √q 729.

Primùm duco 9 in 7, fiunt 63: deinde m. √q 16 in m. √q 9, prouenit p. √q 144: Tum duco decuſſatim p. 7, nempe √q 49, in m. √q 16, fit m. √q 784: ac rurſus decuſſatim p. 9 (hoc eſt √q 81) in m. √q 9, fit m. √q 729: vt aſcriptum vides.

Aliud Exemplum.

√q 24 m. √q 6
√q 18 p. √q 2
√q 432 m. √q 12
m. √q 108 p. √q 48.

Numeri ſigno Pluris affecti ſimul iuncti, efficiunt √q 768: ſigno autem Minoris notati, faciũt √q 192. Quare ablata √q 192 à √q 768, ſupereſt √q 192. In iis itaque multiplicationibus Compoſitorum, videndum erit an particulæ ſint commenſurabiles. & compendij cauſa, ad ſimplices Mediales reductio facienda. Vt in hoc poſtremo Exemplo, √q 24 m. √q 6 non amplius efficiebat quàm √q 6: Et √q 18 p. √q 2, facit √q 32. Quapropter ducenda √q 32 in √q 6, fiet √q 192.

Aliud Exemplum.

6 *m.* √q20
8 *m.* √q45

48 *p.*√q900 *m.*√q1280 *m.*√q1620 : *quæ omnino ſunt* 78 *m.*√q5780. *Item,*

√qq 288 *m.* √qq648
√qq128 *m.*√qq162

√q 192 *p.*18 *m.* √q288 *m.* √q216.

DIVISIO IRRATIONALIVM Compoſitorum & Diminutorum.

CAP. XIIII.

DIuiſio Compoſitorum & Diminutorum Medialium ſumpta eſt ex octaua Propoſitione ſeptimi libri Elementorum, quæ ſic habet, Si duo Numeri multiplicati fuerint per tertium, duo producti eam inter ſe habebunt rationem, quam duo ipſi Numeri inter ſe: Vt ſi 12 & 6, inter quos dupla eſt proportio, multiplicentur in 3, proueniunt 36 & 18: inter quos proportio dupla eſt, ſicut 12 ad 6. Ex hoc Theoremate diuiſionem Medialium ſic colligemus. Quum ob Diuiſoris Diuidendique numeri compoſitionem, Diuiſio ex arte fieri non poſsit, nouum Diuiſorem, nouúmque Diuidendum nobis parabimus, vnde emergat numerus Indicãs qualem quærimus. Scilicet, Si diuiſor fuerit Compoſitus, per ipſius Diminutum multiplica numerum diuidendum & Diuiſorẽ ipſum: Si verò Diuiſor fuerit diminutus, per ipſius Compoſitum multiplica ſimiliter tum Diuidendũ tum Diuiſor: proueniet ex multiplicatione Diuiſoris, numerus ſimplex ſemper. Is erit nouus Diuiſor. Qui autem ex multiplicatione Diuidendi producetur, eum per nouum Diuiſorem partiemur: Exurget numerus Indicans qualem ex primis Numeris quærebamus.

Exemplum

Exemplum. Sint diuidenda 18 *m.* ℟q 36 *per* 7 *m.* ℟q 16: *(id eſt* 12 *per* 3*). Multiplico* 7 *m.* ℟q 16*, Diuiſorem, per ſuum Compoſitum, ſcilicet per* 7 *p.* ℟q 16 : *proueniunt* 33. *Tum per eundem Compoſitum multiplico Diuidendum,* 18 *m.* ℟q 36: *proueniunt* 198 *m.* ℟q 4356. *Iam per* 33 *diuido* 198 *m.* ℟q 4356: *ſcilicet* 198 *per* 33*, exeunt* 6: *tum ex* 33 *facio Medialē,* ℟q 108: *ac per hunc diuido m.* ℟q 4356*, exit m.* ℟q 4. *Habeo igitur Indicantem numerum,* 6 *m.* ℟q 4 : *ea ſunt* 4.

Exemplum in Irrationalibus. Volo diuidere 66 *m.* ℟q 200. *per* 8 *m.* ℟q 45. *Multiplico Diuidendum & Diuiſorem per* 8: *p.* ℟q 45*, Compoſitum: proueniunt* 228 *p.* ℟q 7220*, nouus Diuidēdus: &* 19*, nouus Diuiſor. Per* 19 *diuido* 228 *p.* ℟q 7220*, fit Numerus Indicans,* 12 *p.* ℟q 20.

Probatur, ducendo 12 *p.* ℟q 20 *in* 8 *m.* ℟q 45: *redeunt enim* 66 *m.* ℟q 2000.

Aliud. Volo diuidere 12 *per* ℟q 10 *p.* ℟q 8. *Duco* 12 *in* ℟q 10 *m.* ℟q 8*, prouenit* ℟q 1440 *m.* ℟q 1152. *Duco itidem* ℟q 10 *p.* ℟q 8 *in* ℟q 10 *m.* ℟q 8*, proueniunt* 2 : *per* 2 *(hoc eſt per* ℟q 4*) diuido* ℟q 1440 *m.* ℟q 1152*, exeunt* ℟q 3600 *m.* ℟q 288*, numerus qui ex diuiſione propoſita quærebatur. Probatio. Duc* ℟q 360 *m.* ℟q 288 *in* ℟q 10 *p.* ℟q 8*, redibunt* ℟q 3600 *p.* ℟q 2304: *Ea ſunt* 12.

DE IRRATIONALIBVS COMPOſitis & Diminutis compendiaria præceptio.

CAP. XV.

QVanuis Diminuti numeri ad ſuos Compoſitos addi poſſint & ab iiſdem ſubtrahi, tum vtrique multiplicari & diuidi ex arte à nobis iam tradita: hu-

ius tamen negotij peculiare compendium exiſtit, hoc qui ſequitur, modo.

Additio Diminutorum ad ſua Compoſita.

Particulam Pluris in Diminuto duplica: quod hinc exurgit, eſt numerus ex additione Diminuti ad ſuum Compoſitum, productus. Vt, 15 m. √q 4 *addita ad 15 p.* √q 4, *faciunt* 30. *Item* √q 12 *m.* 3 *addita ad* √q 12 *p.* 3, *faciunt* √q 48.

Subtractio.

Particulam Minoris in Diminuto duplica, habebis numerum ex Subtractione Diminuti à ſuo Compoſito, reliquum. Vt 10 *m.* √q 4 *ſubtracta à* 10 *p.* √q 4, *relinquunt* √q. 16. *Item* √q 12 *m.* 3 *ſubtracta à* √q 12 *p.* 3, *relinquunt* 6.

Multiplicatio.

Vtranque particulã quadra: tum à maiori quadrato aufer minus. Vt, volo ducere 8 *p.* √q 4 *in* 8 *m.* √q 4. *Quadro* 8, *fiunt* 64: *& quadro* √q 4, *ea ſunt* 4: *tum aufero* 4 *à* 64, *manent* 60, *numerus ex Multiplicatione* 8 *p.* √q 4 *per* 8 *m.* √q 4. *Item* 12 *p.* √q 6 *ducta in* 12 *m.* √q 6, *faciunt* 138. *Et* √q 24 *p.* √q 6 *in* √q 24 *m.* √q 6, *faciunt* 18.

Diuiſio.

Diuiſionis autem ratio non perinde eſt compendiaria: ſed per generalem Compoſitorum præceptionem, quam modò exhibuimus, abſoluitur. Compoſita enim ſuis Diminutis non ſunt commenſurabilia. Diuiſio verò Numerorum nil aliud eſt, quàm proportionis

portionis inueſtigatio. Quare ad huiuſmodi Diuiſionem ℣temur decimaoctaua Propoſitione ſeptimi Elementorum, ſicut ante docuimus.

DE VNIVERSALIBVS COMPOſitis & Diminutis: atque obiter de Radicibus, quas Ligatas, & quas Diſtinctas vocant.

CAP. XVI.

Vniuerſales Cōpoſiti & Diminuti notantur ſigno à particulis per punctū ſeiuncto. Et à nonnuis ll ℣ocantur Radices Vniuerſales. Vt V q. 22 p. 9, ſignum V q, per punctum ſeponitur à particula 22: ℣t ſignificetur ipſum ſignum non ad priorem duntaxat, ſed ad ℣tranque communiter pertinere. Scilicet totius Compoſiti, 22 p. V q 9, ſumitur Radix: quæ ſic enunciatur, Radix ℣niuerſalis 22 p V q 9. Ea eſt 5. Numerum quippe Rationalem, doctrinæ cauſa, poſuimus: Alioqui huiuſmodi numerorum particulæ in ℣nam non contrahuntur, quum ſint incommenſurabiles. Duæ præterea traduntur Radicum Irrationalium ſpecies. Prior, Radicum quas Ligatas ℣ocant. Vt V q 16 p. V q 9. Cuius ſumma eſt, ℣t ambæ particulæ coniunctè ſumantur inſtar ℣nius Numeri. Scilicet, V q 16 p. V q 9, faciunt 7. Sunt qui ſic diſtinguānt, ℞ L 16 p. V q 9. Altera ſpecies, eſt earum quas Diſtinctas appellant. Vt V q 16, p. V q 9. In quibus particulæ ſeparatim intelliguntur. Scilicet, Radix 16 per ſe, & Radix 9 itidem per ſe. Ea ſunt 4 & 3: neque tamen ſunt 7. Atque inter ambas hoc intereſt, quòd cum V q 16 p. V q 9, ducitur in ſeipſum ℣t Radix Ligata, facit 49: Sed ℣t Radix Diſtincta, facit 16 & 9:

quæ 25 duntaxat conſtituunt. Sunt qui ſic notent, R.D. 16 p. √q 9.

Sed de his duabus poſterioribus nihil attinet priuatim præcipere, vt quæ ex Simplicium & Compoſitorum irrationalium præceptionibus ſatis innoteſcant.

Radices verò Vniuerſales non ſine ratione peculiarem tractationem recipiunt. Sunt enim Radices Binomiorum Quarti, Quinti, & Sexti: atque ob id, ad decimi libri Elementorum Euclidis intelligentiam apprimè neceſſariæ.

VNIVERSALIVM COMPOSITORUM ad ſua Diminuta Additio.

CAP. XVII.

HAec Additio peragitur officio Additionis et Multiplicationis, quas ſuprà dedimus, Compoſitorum. Exemplum. Sit addenda √q. 12 p. √q 6 ad √q.12 m. √q 6. Ambos numeros ſigno Pluris connecto, idque duplici poſitu, ad hunc modum,

√q. 12 p. √q 6 p. √q. 12 m. √q 6

√q 12 p. √q 6 p. √q 12 m. √q 6.

Primum addo 12 p. √q 6 ad 12 m. √q 6, inſtar Compoſitorum & Diminutorum, tanquam nulla eſſet Radix Vniuerſalis: fiunt 24. Tum eoſdem inter ſe multiplico eadem lege qua Compoſitum per ſuum Diminutum. Scilicet, quadro 12, fiunt 144: quadro etiam √q 6, fiunt 6: aufero 6 à 144: manent 138. Hu præpono ſignum, fit √q 138. Tandem duplico √q 138, propterea quòd vterque numerus bis ponitur, vt ex formula apparet, prouenit √q 552. Habes igitur 24 p. √q 552. Quibus præpone ſignum Vniuerſale, fit √q. 24 p. √q 552, ſumma Additionis.

Hæc

Hæc autem addendi ratio, ex quarta ſecundi Elementorum Euclidis traducta eſt.. Scilicet, ſi duo Numeri(nam omnes libri illius Propoſitiones ad Numeros accommodantur)ſimul iuncti fuerint, additúmque in ſe multiplicetur : totius producti Radix quad. æqualis eſt duobus ipſis numeris ſimul iunctis. Vt 6 ad 2 addita, efficiunt 8: duco 8 in ſe, fiunt 64: quorum radix, eſt 8. Sic √q.12 *p.* √q 6 *cum* √q.12 *m.* √q 6 *in ſe ducta, faciunt* 24 *m.* √q 552: *quorum Radix* √q. 24 *m.* 552, *erit eadem cum* √q.12 *p.* √q 6 *p.* √q. 12 *m.* √q 6: *Nam quũ* 24 *p.* √q 552, *ſit Binomium quartum, erit ipſius propria Radix aliqua. Et ea eſt,* √q.12 *p.* √q. 6 *p.* √q.12 *m.* √q 6, *vt proximè explicabimus in Radicum extractione.*

VNIVERSALIVM DIMINVTOrum à ſuis Compoſitis Subtractio,

CAP. XVIII.

Subtractio ex Additionis præceptione elicitur, vtpote adhibito ſimili Theoremate ei quod modò induximus : hoc eſt, Si duorum Numerorum alter ab altero ſubducatur, reliquum verò in ſe multiplicetur: producti Radix, æqualis eſt ipſi reliquo. Vt, 2 à 6 ablata, relinquunt 4: hæc 4 in ſe ducta, efficiunt 16: quorum Radix, 4.

Igitur ſubtrahenda ſit √q.12 *m.* √q 6 *à* √q. 12 *p.* √q 6. *Numeros colloco vt in Additione, ad multiplicandum, duplici hoc poſitu,*

√q. 12 *p.* √q 6 *m.* √q. 12 *m.* √q 6

√q. 12 *p.* √q 6 *m.* √q. 12 *m.* √q 6.

√q. 24 *m.* √q 138, *m.* √q 138,

hoc eſt, √q. 24 *m.* √q 552.

Scilicet, addo duas priores amborum particulas, fiunt 24: tum multiplico √q 12 p. √q 6 per m. √q. 12 m. √q 6, proueniunt m. √q 138 bis: hoc eſt √q 552. Igitur √q. 24 m. √q 552, eſt numerus Subtractionis quæſitus. Vides Subtractionis calculum nihil differre ab Additione, niſi ſigno Minoris.

VNIVERSALIVM Multiplicatio.

CAP. XIX.

Multiplicationem pene totam explicauimus in Additione. Eius verò formulam hîc aſſcripſimus articulatim.

√q. 12 p. √q 6 p. √q. 12 m. √q 6
√q. 12. p. √q 6 p. √q. 12 m. √q 6.
12 p. √q 6 p. 12 m. √q 6.
√q. 144 p. 6 p. √q. 144 m. 6.

Conſtat ſigna Pluris deſtrui à ſignis Minoris: ſcilicet, vt m. √q 6, deponit p. √q 6: & m. 6, eximit p. 6. Proinde in Additione prætermittuntur.

Iam verò ad integram Multiplicationis præceptionem ſubiiciemus Exemplum, quo Radix Vniuerſalis per numerum ſimplicem multiplicetur, cúmque rationalem abſolutum. Sit multiplicanda √q. 12 p. √q 16 in 6. (hîc ducuntur 4 in 6). Qui quidem calculus difficilis non erit, ſi meminerimus, ſignum Vniuerſale reſpicere ambas communiter particulas, vt ſit √q 16 tanquam √qq 16, id eſt tanquam duplici ſigno Quadratorum affecta. Ob id, reducendus eſt numerus multiplicans ad √q 36, vt

multiplicemus particulam priorem, 12: Sed ad multiplicandam Vq 16, *idem ſenarius reducendus eſt ad* Vqq 1296: *hoc eſt, ad Biquadratum. Erit igitur poſitio huiuſmodi,*

Vq. 12 p. Vq 16
36 p. 1296

Vq 432 p. Vq 20736. *Horum ſumma, eſt* 24.

Aliud Exemplum notabile. Sit multiplicanda Vq 16 p. Vq 9 *per* Vq. 23 p. Vq 4. *Duco* Vq 16 p. Vq 9 *ad Radicem Surdam: ſcilicet, multiplico quadratè, & producto præpono ſignum Vniuerſale: fiet* Vq. 25 p. Vq 576, *vt vides in ſubiecta formula.*

Vq. 25 p. Vq. 576
Vq. 23 p. Vq 4.

Vq 576 p. Vq 2304 p. Vq 2500 p. Vq. 304704. *Summa eſt,* Vq 1225. *Ea ſunt* 35. *Satis ergo fuerit meminiſſe, Radices Ligatas & ſimiles, ad Vniuerſales eſſe reducendas, vt cum ipſis in ſupputationem venire poſſint.*

VNIVERSALIVM DIVISIO.

CAP. XX.

Diuiſionis ratio vno aut altero Exemplo eluceſcet, adhibita ſuperiorum præceptione.

Volo diuidere Vq. 432 p. Vq 7776, *per* 6. *Sic ſtabit formula,*

Vq. 432 p. Vq 7776 (Vq. 12 p. Vq 6.
Vq 36 Vq 1296.

Alterum Exemplum. Volo diuidere Vq. 588 p. Vq 34848 *per* Vq. 12 p. Vq 8. *Hoc loco repetere memoria oportet quæ Ca-*

pite de Diuiſione Compoſitorum Irrationalium dicta ſunt. Scilicet, multiplico Diuidendum per √q 12 *m.* √q 8*: fit* √q 6524 *p.* √q 332928*, nouus Diuidẽdus: Tum per eandẽ* √q 12 *m.* √q 8*, multiplico ipſius Compoſitum, qui Diuiſor eſt: prouenit* √q 136*, nouus Diuiſor. Iam diuido* √q 332928 *per* √qq 18496*, hoc eſt, per* √q 136*: exit in numerum Indicantem,* √q 48 *p.* √q 18.

Probatio fit vulgato more: ducto ſcilicet numero Indicante in Diuiſorem, nempe √q 48 *p.* √q 18 *in* √q 12 *p.* √q 8*: redibit* √q 588 *p.* √q 34848*, numerus initio ſuſceptus.*

DE EXTRACTIONE RADICVM ex Binomiis & Reſiduis.

CAP. XXI.

BInomij & Reſidui ſeu Apotomes, Radicem ſic elicies,

Sume differentiam Quadratorũ vtriuſque particulæ: huius differentiæ radicem adde ad maiorem particulam, & ab eadem aufer. Demum à dimidiis duorum productorum eductæ Radices, & per ſignum proprium connexæ, Radicem quæſitam exhibebunt. Exemplum.

Quæro Rad. quadratam huius Binomij primi, 8 p. √q 48*. Quadrata particularum, ſunt 64 & 48: horum differentia, 16: quorum Radix, 4. Hanc Radicem addo ad maiorem Binomij particulam, 8: fiunt 12: atque eandem aufero ab 8: ſuperſunt 4. Dimidia 12 & 4, ſunt 6 & 2: quorum Radices* √q 6 *&* √q 2 *connecto ſigno Pluris (erat enim Binomium) fit* √q 6 *p.* √q 2*, Radix quæſita. Alterum Exemplum. Sit extrahenda Radix ab hoc Binomio ſecundo,* √q 48 *p. 6. Differentia quadratorum particularum, eſt 12. Huius Radicem,* √q 12*, addo ad ma-*

ad maiorem particulam, nempe ad ℞q48: fit ℞q108: atque ab eadem aufero, manet ℞q12. Dimidia ℞q108 & ℞q12, ſunt ℞q27 & ℞q3, quorum Radices, ℞qq27 & ℞qq3 ſimul connexæ, faciunt ℞qq27 p. ℞qq3, Radicem Binomij ℞q48 p.6. Tertium Exemplum. Volo Radicem huius Binomij tertij, ℞q50 p. ℞q32. Differentia quadratorum eſt 18. Horum radicem, ℞q18, addo ad ℞q50, fit ℞q128: aufero ab eadem, manet ℞q8. Dimidia ℞q128 & ℞q8, ſunt ℞q32 & ℞q2, quorum Radices iunctæ faciunt ℞qq32 p. ℞qq2, Radicem quæſitam. Hæ tres Radicum ſpecies ſunt ex Compoſitis numeris. Radices verò Binomiorum quarti, quinti & ſexti conſtant Cōpoſito numero ipſiúſque Diminuto, cum rad. Vniuerſali vtrique præfixa, vt iam non ſemel meminimus. Atque eodem artificio extrahuntur, quo tres ſpecies priores modò tractatæ. Exemplum.

Volo Radicem huius Binomij quarti, 24 p. ℞q552. Differentia quadratorum, eſt 24: cuius Radicem addo ad 24, maiorem Binomij particulam, fiunt 24 p. ℞q24: atque ab iiſdem aufero, manent 24 m. ℞q24. Horum duo dimidia, ſunt 12 p. ℞q6 & 12 m. ℞q6: quorum Rad. ſic connecto, ℞q. 12 p. ℞q6 p. ℞q. 12 m. ℞q6. Atque hoc totum complexum, eſt Radix quæſita.

Sic Radix huius Binomij quinti, ℞q96 p. 8., eſt hoc connexum, ℞q. ℞q24 p. ℞q6 p. ℞q. ℞q24 m. ℞q8.

Denique huius Binomij ſexti, ℞q48 p. ℞q28 Radix, eſt ℞q. ℞q12 p. ℞q5 p. ℞q. ℞q12 m. ℞q5.

Atque ea eſt extrahendarum Radicum quadratarum è Binomiis ratio à nobis in compendium redacta, eáque facillima. Reſiduorum verò Radices eadem planè methodo extrahuntur, ſigno tantum Minoris diſcrepantes.

Hæc de Binomiis ſatis eſſe putamus, quantum ad præſens argumentum attinet: de eorundem inuentione & vſu pleniſſimè dicturi in decimo Elementorum libro, quem nouis meditationibus illuſtrabimus, quum integrum Euclidem, Deo approbante, daturi

ſumus. Quod inſtitutum vt intermitteremus, non operis, ſed temporis difficultas effecit. Nos ad ea, quæ de numerorum Irrationalium præceptione ſuperſunt, progrediamur.

DE MINVTIIS IRRATIONAlium Numerorum.

CAP. XXII.

Minutiarum Irrationalium computatio partim integrorum Irrationalium partim abſolutorum calculo conſtat. Differt autem ab ea quam priore libro docuimus, Denominatorum computatione. Nam præter id quòd in hac, ſignum præponitur: in illa, ſequitur: in hac etiam ſignum non ſemper totam fractionem afficit, vt in illa: ſed pro collocatione, aut Numeratorem, aut Denominatorem duntaxat: Neque vtrunque reſpicit, niſi inter ipſos ſit medium. Vt in Denominatis nihil intereſt vtrum ponas $\frac{16q}{64}$*, hoc eſt, ſedecim Quadrata diuiſa per 64, an verò* $\frac{16}{64q}$*, hoc eſt, ſedecim ſexageſimas quartas vnius Quadrati: ſicut illic oſtendimus. At in Irrationalibus ſi dixeris,* $\frac{\surd q\,16}{64}$*, vt ſignum priuatim 16 anteeat: ſignificatur Radix Quadrata 16 diuiſa per 64: eæ ſunt* $\frac{4}{64}$*, ſeu* $\frac{1}{16}$*. At ſi medium poſueris ſignum, hoc modo,* $\surd q\,\frac{16}{64}$*: ſignificabitur Radix Quadrata ſedecim ſexageſimarum quartarum: hoc eſt,* $\frac{1}{4}$*.*

Sola verò hîc proportio ſpectatur, ſicut in cæteris Minutiarum generibus. Vt $\frac{\surd q\,64}{2}$*,* $\surd q\,\frac{64}{4}$ *&* $\frac{64}{\surd q\,256}$*, idem ſignificant.*

Eæ etiam ad minimam denominationem reducuntur, in modum fractionum vulgarium. Vt $\surd q\,\frac{144}{36}$*,* $\surd q\,\frac{36}{9}$*,* $\surd q\,\frac{16}{4}$*, &* $\surd q\,4$*, idem ſunt. Item* $\surd qc\,\frac{4}{8}$*, &* $\surd qc\,\frac{1}{2}$ *&* $\frac{\surd qc\,2}{\surd q\,2}$ *idem.*

Additio.

Additio.

Numeros reduc ad eãdem denominationẽ, ſi diuerſam habeant. Vt, ſi ſint addenda Vq 512/3 m Vq 4 *ad* Vq 49/2 p Vq 27 *(hic adduntur 2 ad 5) erit reductio,* Vq 441/6 p Vc 729 *&* Vc 4096/6 m Vq 16. *Iam adde duos Numeratores quadratos, ſcilicet* Vq 441 *&* Vq 16 *(atque hic fit ſubtractio, ob ſignum m.) fit* Vq 289. *Tum adde duos Numeratores cubicos, ſcilicet* Vc 729 *ad* Vc 4096: *fit* Vc 15625. *Duobus productis ſigno Pluris connexis ſubſcribe Denominatorem communem, 6: erit numerus Additionis,* Vc 15625 p Vq 289/6.

Subtractio.

Sit ſubtrahẽda Vq 512/3 p Vq 4 *à* Vq 49/2 p Vq 27. *Facta, vt paulò antè, reductione, aufer* ℞ *Quadratam à Quadrata (fitque Additio, ob ſignum m. ſcilicet additur* Vq 16 *ad* Vq 441) *prouenit p.* Vq 625. *Aufer poſtmodum* ℞ *Cubicam à Cubica, hoc eſt,* Vc 729 *à* Vc 4096: *manet m.* Vc 343. *Vtrique producto ſubſcribe Denominatorem communem, 6: Fiet numerus Subtractionis,* Vq 625 m Vc 343/6.

Non eſt prætereundum, particulas commenſurabiles eſſe debere: alioqui neque Additio neque Subtractio fieret, niſi per ſigna p. & m. Proinde ſi Quadrata per ſe commenſurabilia non fuerint, vide an cum Cubis conciliari poſſint: ſcilicet per reductionem ad idem ſignum.

Multiplicatio.

Reducendæ ſimiliter Minutiæ, ad idem ſignũ eãdémque denominationem. Vt, Volo multiplicare Vq 36/3 *per* Vq 27/2 *(hoc eſt* 6/3 *per* 3/2*) Reductio ad eandem denominationem, eſt* Vq 144/6 *&* Vq 729/6: *quæ ad idem ſignũ reducta, faciunt* Vqq 2985984/6 *&* Vqq 531441/6: *Hæc tandem inter ſe multiplicata, faciunt* Vqq 1586874322944/36.

144 ╲ ╱ 722

q ╱ ╲ cc

√qq 1929984 / 0 √qq 531441 / 6

Probatio eſt, quòd ℞ Quadraticubica 15868743222944, eſt 108: quæ per 36 diuiſa, faciunt 3.

Diuiſio.

Hæc etiam vtranque reductionem exigit, tum ad idem ſignum, tum ad eandem denominationem. Reductione autem perfecta, abiiciuntur Denominatores: perficitúrque Diuiſio per Numeratores. Veluti, Sit Diuidenda $\frac{\sqrt{qq}\,512000000\ p.\ \sqrt{qq}\,26873856}{10}$ *per* $\frac{\sqrt{qq}\,2359296}{10}$. *Reiectis Denominatoribus, diuido* √qc 512000000 *p.* √qc 26873856, *per* √qc 2359296. *Erit numerius Indicans,* √qc 217 $\frac{1}{72}$ *p.* 1 $\frac{1}{2}$, *vel* $\frac{5}{\sqrt{q}\,72}$ *p.* 1 $\frac{1}{2}$.

DE TRINOMIIS QVÆdam obiter.

CAP. XXIII.

Trinomiorum vſum nondum vllum animaduerto: quem fortaſſe aliquem eſſe non negauerim, quum ſuam habeant artem. Horum itaque Additio, Subtractio & Multiplicatio, ex ſuperioribus præceptis colligetur. Diuiſio verò ea eſt, quæ poſſit ſtudioſum remorari. Quæ vt fiat, parandus eſt nouus Diuiſor, nouúſque Diuidẽdus, ad hunc modum. Duc Diuiſorem in ſuum Reciſum ſeu Reſiduum: quod fiet, erit Bimediale. Hoc Bimediale multiplica per ſuum ipſius Reſiduum: fiet numerus ſimplex, vt in ſuperioribus docuimus. Hic erit nouus Diuiſor. Duc poſtmodùm, numerum Diuidendum

in

in Reciſum illud primum Diuiſoris:fiet nouus Diuidendus. Iam hunc Diuidendum partire per nouum Diuiſorem. Tandem numerum Indicantem duc in Reſiduum Binomij: Producetur numerus Indicans initio quæſitus. *Exemplum.*

Volo diuidere 100 *per hoc Trinomium,* 3 *p.* √q9 *p.* √q 16. *Quumque ſit vterque Rationalis numerus, conſtat Indicantem numerum, Rationalem futurum: atque is erit* 10.

Primùm ex Trinomio Diuiſore, facio Reſiduum, ſeu veriùs Diminutum, quum quadratum non ſit: ablata ſcilicet vna particularum per ſignum m. Verbi gratia, minuo √q16 *: fit Reciſum Trinomij,* 3 *p.* √q9 *m.* √q16 *. Per hoc multiplico ipſum Trinomium: fit* √q324 *p.* 2. *(Quoniam verò hæc multiplicatio tædioſior eſt, vt pote nouem particularum: ea quomodo ad compendium contrahatur, docebimus. Duc primum* 3 *p.* 9 *in ſe: adde ſcilicet duarum particularum quadrata, fiunt* 18 *: tum alteram ipſarum duplica, vt* 3 *, fiunt* 6 *: per hoc duplum Multiplica alteram particulam, ſcilicet* √q9 *: prouenit* √q324 *: & eſt quarta Propoſitio ſecundi Elementorum: duc poſtmodum p.* √q16 *in m.* √q16 *: fit m.* 16 *. Itaque ex multiplicatione* 3 *p.* √q9 *p.* √q16 *in* 3 *p.* √q9 *m.* √q16 *, fiunt* 18 *p.* √q324 *m.* 16 *hoc eſt,* √q324 *p.* 2 *, Bimediale.*

3 *p.* √q9 *p.* √q16
3 *p.* √q9 *m.* √q16

18 *p.* √q324 *m.* 16 *: ſeu* √q324 *p.* 2 *.) Iam hoc Bimediale duc in ſuum Diminutum,* √q324 *m.* 2 *: fiunt* 320 *. Is erit nouus Diuiſor. Tum ad nouũ Diuidendũ, multiplica* 100 *per Reciſum ipſius Trinomij, ſcilicet per* 3 *p.* √q 9 *m.* √q 16 *: prouenit Trinomium* 300 *p.* √q 90000 *m.* √q160000 *, nouus Diuidendus.*

3 *p.* √q9 *m.* √q16
100 √q1000 √q 10000

100 *p.* √q90000 *m.* √q160000. *Tertiò per* 320, *nouum Diuiſorem, partire* 300 *p.* √q90000 *p.* √q160000:

ſunt $\frac{300}{320}$ *p.* $\sqrt{}$q $\frac{90000}{102400}$ *m.* $\sqrt{}$q. $\frac{160000}{102400}$, *Hunc Indicem, ſeu Quotientem, duc in Reciſum Bimediale, ſcilicet in* $\sqrt{}$q 324 *m.* 2: *proueniunt* $\sqrt{}$q $\frac{29160000}{102400}$ *p.* $\sqrt{}$q $\frac{29160000}{102400}$ *p.* $\sqrt{}$q $\frac{29160000}{102400}$ *m.* $\sqrt{}$q $\frac{51840000}{102400}$ *m.* $\frac{600}{320}$ *m.* $\sqrt{}$q $\frac{160000}{102400}$ *p.* $\sqrt{}$q $\frac{640000}{102400}$. *Atque hoc Cõnexum ſeptem numerorum, erit Index numerus quæſitus. Ea verò ſunt* 10. *Quod probabitur, ſumptis Radicibus cuiuſque ſignati numeri, factiſque ſubtractionibus iis quæ per ſigna Minoris oſtenduntur. Radices igitur (ſeruato ordine, ſigniſque) ſunt* $\frac{5400}{320}$ *p.* $\frac{5400}{320}$ *m.* $\frac{7200}{320}$ *m.* $\frac{600}{320}$ *m.* $\frac{600}{320}$ *p.* $\frac{800}{320}$. *Numeri Pluris, omnino efficiunt* $\frac{11600}{320}$, *hoc eſt,* 36 $\frac{1}{4}$: *Numeri Minoris, efficiunt* $\frac{8400}{320}$, *hoc eſt,* 26 $\frac{1}{4}$. *Hæc ſi auferantur à* 36 $\frac{1}{4}$, *manebunt* 10, *ſicut initio fuit conſtitutum.*

DE MVLTIPLICATIONE CVBICA numerorum Irrationalium Compoſitorum & Diminutorum, & item Vniuerſalium.

CAP. XXIIII.

QVum diuiſeris Numerum in duas partes, & vtrãque duxeris ad Cubum, tum vtriuſque quadratum triplicaueris, ac demum duo hæc tripla in partes ipſas mutuò duxeris: erit omnium horum ſumma, Cubo ipſius Numeri æqualis. Veluti, diuido 10 *in* 6 *p.* 4. *Duco* 6 *ad cubum, fiunt* 216: *itidem* 4 *ad Cubum, fiunt* 64: *habeo* 216 *p.* 64: *id eſt,* 280. *Tum triplico* 36, *fiunt* 108: *Hæc duco in* 4, *fiunt* 432: *Triplico* 16, *fiunt* 48: *hæc duco in* 6, *fiunt* 288. *Producta hæc,* 219, *&* 64 *&* 432 *&* 288, *cõſtituũt* 1000. *Exemplum in Irrationalibus. Et erit Diminutum. Compoſitorum enim multiplicatio facilior eſt. In Diminutorum verò multiplicatione, diligenter attendere oportet permutationem & officium ſignorũ Pluris & Minorũ. Sit igitur hoc Diminutum* 4 *m.* $\sqrt{}$q2 *cubicè multiplicandum. Duco* 4 *ad Cubum, fit p.* 64: *duco itidem*

m. $\sqrt{}$q.

m.√q2 ad Cubum, fit m.√q8. Atque ex eo calculo habeo 64 m.√q8. Tum triplico 16 (id eſt quadratum 4) fiunt 48: Deinde duco 48 (id eſt, √q2304) in m.√q2: prouenit √q-4608. Itidem triplico 2 (id eſt quadratum √q2) fiunt m. 6: hæc duco in 4: prouenit m. 24: quod eſt à Minore iam reperto minuendum: ſcilicet 24 auferenda à m.√q4608. Quare multiplicatio Cubica huius Diminuti 4 m.√q2, erit 64 m.√q8, m.√q4608 m. 24. Vt totum aggregatū conſtet duobus numeris Diminutis: vno, 64 m.√q8: altero, √q 4608 m. 24. Quæ duo diminuta quum intercipiantur ſigno Minoris, ſignificatur poſterius à priore eſſe auferendum: ſcilicet √q 4608 m. 24 à 64 m.√q8. Quod perinde eſt quaſi adderentur 24 ad 64 (ea ſunt 88) & √q4608 ad √q8, fieretque √q5000: inter vtranque additionem poſito ſigno Minoris. Erit igitur multiplicatio Cubica ad Binomium Cubicum redacta, 88 m.√q5000.

Vbi animaduertendum in huiuſmodi multiplicationibus quæ decuſſatim fiunt, particulas quoque decuſſatim eſſe commenſurabiles. Vt in poſteriore hoc Exemplo, 64 & 24 commenſurabiles ſunt, vtpote vtraque Rationalis: ſimiliter √q8 & √q4608, cōmenſurabiles: proportio enim eſt 24, id eſt vigeſima quadrupla.

Alterum Exemplum, de Numero duabus particulis Irrationalibus conſtante. Volo multiplicare √q3 p.√q2 cubicè. Duco vtranque particulam ad Cubum: fiunt √q27 p.√q8: Tum triplico 3 (quadratum prioris) fiunt 9: Duco 9 in √q2: prouenit √q162, commenſurabilis ipſi √q8: ſunt enim in proportione $\frac{9}{2}$, id eſt, quadrupla ſeſquialtera. Quare addita √q162 ad √q8, fit √q242. Similiter triplico 2 (quadratum √q2) fiunt 6: duco 6 in √q3: prouenit √q108, commenſurabilis ipſi √q27: Eſt enim proportio Dupla. Itaque addita √q108 ad √q27, fiet √q343. Cubus igitur totus, erit √q243 p.√q242. Atque hoc diligenter notandum ad multiplicationem Cubicam Radic. Vniuerſalium, quam mox ſubiiciemus: ſi priùs rationem compendiariam

huiuſmodi multiplicationum Cubicarum dederimus. Quadra alteram particulam numeri ad Cubum ducendi: quadratum triplica: ad hoc triplum adde quadratum prioris particulæ. Id totum duc in ipſam priorem particulam: exurget prior Cubi particula. Similiter quadra priorem particulam: quadratum triplica: ad triplum adde quadratum alterius particulæ: productum duc in ipſam ſecundam particulam: fiet ſecunda Cubi particula. Vt in poſtremo Exemplo, ℛq 3 *p.* ℛq 2, *Quadro* ℛq 2, *quadratum triplico, fiunt* 6 *: hæc addo ad quadratum* ℛq 3, *fiunt* 9*: duco* 9 *in* ℛq 3 *: prouenit* ℛq 243, *prior Cubi particula. Eodem modo quadro* ℛq 3, *quadratum triplico, fiunt* 9 *: hæc addo ad* 2, *fiunt* 11 *: Duco* 11 *in* ℛq 2*: prouenit* ℛq 242, *altera Cubi particula. Iam verò ſit cubice multiplicandum hoc Connexum,* ℛ𝔠. ℛq 26 *p.* 5 *m.* ℛ𝔠. ℛq 26 *m.* 5 *: quod conſtat Compoſito & Diminuto: ſicque enunciatur. Radix Vniuerſalis Cubica, radicis quadratæ* 26 *p.* 5. *m. Radice Vniuerſali Cubica* ℞ *quad.* 26 *m.* 5. *Quúnque totius Connexi partes ambæ ſint incommenſurabiles, erit Multiplicatio Cubica particulatim perficienda. Scilicet duc particulas ad Cubum: eaſdem quadra: quadratum vtrunque triplica: ambo tripla duc mutuò in ipſas particulas. Habes formulam hic adſcriptam.*

Cubi particularum,

ℛq 26 *p.* 5 *m.* ℛq 26 *m.* 5*:(atque ea ſunt* 10*) ſicut in Compoſitorum Additione docuimus.*

Quadrata particularum.

ℛ𝔠. 51 *p.* ℛq 2600 *m.* ℛ𝔠. 51 *m.* ℛq 2600.

huiuſmodi

Tripla Quadratorum.

√c. 1377 p. √q 1895400 m. √c. 1377 m. √q 1895400.

Iam hæc tripla Quadratorum, ducenda ſunt decuſſatim in partes ipſas. Poſitio autem ſic erit,

√c. 1377 p. √q 1895400
m. √c. √q 26 m. 5.
———————————
m. √c. 1377 m. √q 1895400
p. √c. √q 26 p. 5.

Hoc loco accuratè animaduertere oportet, in Numeris qui ſignis Pluris & Minoris afficiuntur, ſignum antecedens, ſequentibus ſignis dominari. Vt quum dicimus m. √c. √q 26 m. 5: prius ſignum Minoris, toti Connexo præfixum, habet ius in ſecundum, ipſumque tacitè deſtruit: Vt m. 5 hoc loco valeat m. m. 5, hoc eſt, p. 5. Quum igitur duco √c. 1377 in m. √c. √q 26, fit quidem Minus, nempe m. √c. √q 49299354: quum verò in eandem m. √c. √q 26, duco p. √q 1895400: fit Plus, nempè p. √q 49280400. Nam quum dico m. √c. √q 49299354 p. √q 49280400, quia ſignum Minoris regit ſignum Pluris, & Minus in Plus, producit Minus: manifeſtum eſt ſignum Pluris poſterius, perinde eſſe ac ſi eſſet Minus. Iam ad complendam multiplicationem à nobis ſuſceptam, ducendæ ſunt eædem ipſæ particulæ in m. 5. quod, quia eſt Minoris Diminutio, producet quidem Minus, ſed quod perinde erit ac Plus: Duco ſcilicet 1377 in m. 5, fit m. 6885: duco ſimiliter p. √q 1895400 in m. 5. (hoc eſt in m. √q 25) prouenit m. √q 47385000. Hæc verò Multiplicatio efficit hoc aggregatum quatuor numerorum, m. √c. √q 49299354 p. √q 49280400 m. 6885 m. √q 47385000.

Supereſt iam vt ducamus m. √c. 1277 m. √q 1895400 in p. √c. √q 26 p. 5. Cuius multiplicationis producta, eadem erunt quæ in priore calculo: ſed tamen diuerſis ſignis affecta.

Vbi ſi diligenter animaduerterimus vim ſignorum præeuntium & ſequentium: facilè ſingula ſingulis accommodabimus. Erit igitur aggregatum huiuſmodi, m. √c. √q 49299354 *m.* √q 49280400 *p.* 6885 *m.* √q 47385000. *Vtraque harum Multiplicationum ad Binomium reducitur: quum ſint particulæ decuſſatim commenſurabiles, vt diximus. Scilicet, ſi auferamus* √q 47385000 *à* √q 49299354: *ſupererit* √q 18954. *Similiter ſi auferamus* 6885 *à* √q 49280400 (*is eſt numerus rationalis, nempe* 7020) *ſupererunt* 135. *Quare duæ multiplicationes ſic erunt, ſcilicet prior,*

m. √c. √q 18954 *p.* 135: *altera verò m.* √c. √q 18954 *m.* 135. *ac tandem Cubus totus, erit* 10 *m.* √c. √q 18954 *p.* 135 *m.* √c. √q 18954 *m.* 135. *Vide formulas ſingularum quas dedimus multiplicationum, huc in ordinem collatas.*

I.

√c. √q 1896129 p. √q 1895400
m. √c. √q 26 m. √c. √q 26.

m. √c. √q 49299354 p. √q 49280400.

II.

√c. 1377 p. √q 1895400
m. 5. m. √q 25.

m. 6885 m. √q 4738500.

III.

m. √c. √q 1896129 p. √q 1895400
p. √c. √q 26 p. √c. √q 26.

m. √c. √q 49299354 m. √q 49280400.

IIII.

m. √c. 1377 m. √q 1895400
p. 5. p. √q 25.

p. 6885 m. √q 47385000.

Hanc mul-

Hanc multiplicationem Cubicam exquiſitè nobis ſumpſimus explicandam, quòd eadem ipſa à Cardano ſit propoſita Cap. 11 ſuæ Algebræ: vt intelligant Numerorum ſtudioſi, diuerſa methodo & effectione, ſcopum vnum attingi poſſe. Collocatio enim ſignorum noſtra, alia eſt quàm quæ ab ipſo aſſcribitur. Colligit enim Cubum eſſe, 10 *p.* √c. √q 18954 *m.* 135 *m.* √c. √q 18954 *p.* 135. *Quæ computatio vera quidem eſt, nec alia eſſe poteſt, ſi æſtimationem ſpectemus: ſed collocatione, diuerſa eſt. Nam ex particularum ſignorúmque conſtitutione quam ipſe adiicit, huiuſmodi multiplicationum artem aut normam colligere potes. Repetito igitur Cubo à nobis collecto, ſcilicet* 10 *m.* √c. √q 18954 *p* 135 *m.* √c. √q 18954 *m.* 135, *noſtram ſententiam ex ipſius argumento confirmabimus. Ponit ipſe* √c *p.* 3 ℞ *æquari* 10 : *atque ex deductione, colligitur æſtimatio* 1 ℞, *eſſe* √c. √q 26 *p.* 5 *m.* √c. √q 26 *m.* 5. *Quò fit, vt* 3 ℞ *æſtimatio ſit* √c. √q 18954 *p.* 135. *m.* √c. √q 18954 *m.* 135. *Hoc autem Connexum noſtrum,* √c. √q 18954 *p.* 135 *m.* √c. √q 18954 *m.* 135 *ſic aduerſatur huic, m.* √c. √q 18954 *p.* 135 *m.* √c. √q 18954 *m.* 135, *vt ſingulæ particulæ ſingulas deſtruant. Quare* 1c *p.* 3 ℞ *manent æquales* 10 *exactè, ex ipſa Poſitionis ſententia.*

DE NVMERIS IRRATIONAlibus Denominatis.

CAP. XXV.

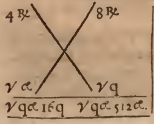
QVemadmodum Numeri Abſoluti in Irrationales tranſeunt, dum notis Irrationalibus præſignantur: vt ex 6 *fit* √q 6 : *ita Numeri Denominati (quos Coſicos vulgò dicunt) Irrationales fiunt, quum ipſis ſignum aliquod Irrationalium præ-*

ficitur. Vt ex 4 ℞, fit √q 4 ℞, Numerus Denominatus Irrationalis: qui ſic enunciatur, Radix Quadrata quatuor Radicum. Quanuis autem huiuſmodi Numeros, Irrationales vocemus: tamen Numeros Denominatos, Rationales eſſe non ſtatuemus, niſi quatenus ſigno Irrationali præoccupantur. Nã quum √q 2 c æquè Rationalem & Irrationalem Numerum poßit includere (vt ſi æſtimatio Cubi ſit 8, tum √q 2 c erit 4: ſi verò æſtimatio ſit 27, erit √q 2 c, 54) fit vt Numeri Denominati inter naturam Rationalium & Irrationaluim ambigant, donec ipſorum conditio detegatur.

DE REDVCTIONE IRRATIOnalium Denominatorum.

CAP. XXVI.

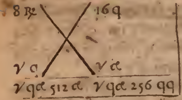
Reductio Denominatorum Irrationalium dupliciter fit, quum ipſi duplex ſignum habeant. Prior, eſt ſignorum præpoſitorum: quæ Reductio ad idem ſignum dicitur: Altera, poſtpoſitorum, quæ Reductio ad ſimplicißimam æſtimationem vocatur: ſeu vt vulgò dicunt, ad minimos terminos. Harum vtranque quum librò priore docuerimus, Exempla hoc loco dediſſe ſatis fuerit. Volo reducere √c 4 ℞ & √q 8 ℞: fiet √qc 16 q & √qc 512 c, ad idem ſignum Reductio.



Quod probatur, ſumpto Binario in Radicem. Erit enim √c 4 ℞, 2: & √q 8 ℞, erit 4. Iam √qc 16 q, valent √c 4 ℞:, ſcilicet 2: Nam 16 q valent 64, quorum Radix Quadraticubica eſt

ca, eſt 2. Similiter √q∝ 512 ∝, æqualis eſt √q 8 ℞. Nam 512 ∝ faciunt 4096: quorum Radix Quadraticubica, eſt 4. Reductio verò ad ſimpliciſsimam denominationem, erit √q∝ 16. & √q∝ 512 ℞.

Item, volo reducere √q 8 ℞ & √∝ 16 q: erit prior Reductio, √q∝ 512 ∝, & √q∝ 256 qq: altera verò, √q∝ 512, & √q∝ 256 ℞.



Probatio. Sumantur 2 in Radicē, erunt √q 8 ℞ & √∝ 16 q æquales inter ſe. Nam 8 ℞ faciunt 16: quorum √q, eſt 4: & 16 q faciunt 64: quorum √∝, itidem eſt 4. Iam √q∝ 512 ∝ valet √q 8 ℞: quum ex ſuperiori exemplo conſtiterit √q∝ 512 ∝, eſſe 4. Tum √q∝ 256 qq valet 16 q. Nam 256 qq faciunt 4096: quorum √q∝, eſt 4. Secunda verò Reductio manifeſta eſt. Nam 256 ℞ faciunt 512: id eſt, 1 ℞, facit 2: quæ fuit hypotheſis.

Hoc autem obſeruandum, vt Reductio ad idem ſignum prior fiat. Nam ſi √q 8 ℞ & √∝ 16 q prius reducerentur ad minimā æſtimationem, falſa eſſet Reductio. Conſtat enim √q 8 non eſſe æqualem √∝ 16 ℞, ſumpta qualibet Radice ad quæſtionem exercendam. Quūmque in mentionē Æquationis è re nata reciderimus, id obiter monendum eſſe duximus, hanc æquationem √q 24 ℞ & 12, cum ſimilibus, facilem eſſe ac perſpicuam. Oportet enim 24 ℞ æquari quadrato 12, quod eſt 144. Et quum √q 3 ∝ fuerit æqualis 9, oportet tres Cubos æquales eſſe 81, quorum √q eſt 9. Hoc monui, quòd huiuſmodi æquationes à quibuſdam proponantur tanquam difficiles.

DE ADDITIONE, SVBTRActione, Multiplicatione, & Diuiſione Irrationalium Denominatorum.

CAP. XXVII.

ADditio & Subtractio Denominatorum Irrationalium fit per ſigna Pluris & Minoris. Veluti √q 24 ℞ addita ad √q 12 q, facit √q 24 p. √q 12 q. Et √q 12 q ſubtracta à √q 24 ℞, relinquit √q 24 ℞ m. √q 12 q.

Quòd ſi ſigna denominantia fuerint eadem, & numeri Irrationales, ſemotis ſignis denominantibus, fuerint commenſurabiles: fiet Additio & Subtractio ſicut Medialium. Scilicet, quemadmodum √q 6 cum √q 24, facit √q 54: ita √q 6 ℞ cum √q 24 ℞, facit √q 54 ℞. Rurſus, quemadmodum √q 6 ſubtracta à √q 24, relinquit √q 6: ita √q 6 ℞ ſubtracta à √q 24 ℞, relinquit √q 6 ℞: Cuius rei probatio conſtat, ſumpto vno quopiam Numero in Radicem. Vt in poſteriori Exemplo, ſit Radix 6. Tunc 6 ℞ faciunt 36: & 24 ℞ faciunt 144. Quare √q 6 ℞, erit 6: & √q 24 ℞, erit 12: quæ addita faciunt 18. Iam vtique √q 54 ℞ facit 18. Scilicet, 54 ℞ faciunt 324: quorum Radix eſt 18. Eadem ratione probatur Subtractio.

Multiplicatio verò & Diuiſio (adhibita ſemper Reductione) nullo alio præcepto indigent, quàm per Exempla.

Vt √qce 512 ducta in √qce 256 qq, facit √qce 131072 bß. Probatio eſt, quod 1 bß facit 128: ob id, 131072 bß faciunt 16777216: quorum Radix qce, eſt 16. Nam √q 16777216 facit 4096: quorum Radix Cubica, eſt 16. Et tantundem efficiunt ambo numeri inuicem ducti. Vterque enim valet 4.

Exemplum

Exemplum Diuiſionis. √ qce 131072 bß diuiſa per √ qce 512 ce, facit √ qce 256 qq. Scilicet, 131072 diuiſa per 512, faciunt 256. Quare in Multiplicatione & Diuiſione, ſigna præpoſita manent eadem, quemadmodum in Medialibus fieri ſolet. Signa vero denominantia mutantur pro Exponentium indicatione, ſicut in Denominatis docuimus. Fractiones verò priuatim tradere nihil attinet, vt quæ integrorum ſuorum præcepta ſequantur.

DE EXEMPLIS PERTINENTIbus ad Numeros Irrationales.

CAP. XXVIII.

QVæ nos ſubiiciemus Exempla, partim ad numeros Irrationales Simplices & Compoſitos, partim ad Denominatos Irrationales accommodabuntur. Pauca verò dabimus in præſens, dum nos tertium librum meditamur: in quo Quæſtiones Geometricas exquiſitè tractabimus, vt Algebram ſimul cum Geometria ad vſum vtriuſque coniungamus.

Quæſtio I.

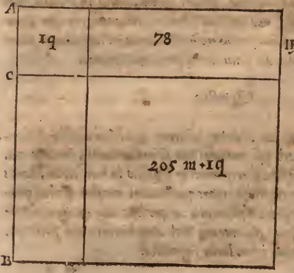
Quæruntur duo Numeri, quorum quadrata iuncta faciant 205: duo verò ipſi numeri inter ſe multiplicati, faciant 78. Hoc perinde eſt ac ſi proponeretur Quæſtio in hæc verba, Linea in duas partes eſt diuiſa: cuius quadratum conſtat duobus quadratis duobuſque Supplementis: atque hæc duo quadrata iuncta faciunt 205: alterutrum verò Supplementorum facit 78. Quanta ſunt duo ipſius lineæ ſegmenta?

Imprimis attendere oportet, totum Quadratum lineæ propoſitæ (ea ſunt quadrata duorum numerorum cum duplici inter ſe multiplicatione) eſſe 361. *Duæ enim multiplicationes faciunt* 156: *quæ additæ ad* 205, *conſtituunt* 361.

Sit itaque linea AB inæqualiter diuiſa in puncto C. *Ponatúrque pro ſegmento AC*, 1℞. *Huius quadratum, erit* 1q: *ſicque quadratum ſegmenti CB, erit* 205 *m.* 1q. *Cuius Radix, eſt* √q. 205 *m.* 1q. *Iunge ambas Rad. fiet* 1℞ *p.* √q. 205 *m.* 1q: *tota ſcilicet linea AB. Hoc totum duc in ſe, fiunt* 205 *p.* √q 820 q *m.* 4qq: *vt eſt in ſubiecta formula: in qua pro* 1℞ *ponitur* √q 1q. *Hanc enim reductionem, Multiplicationis lex requirit, ſicut antè docuimus.*

√q 1q *p.* √q. 205 *m.* 1q.
√q 1q *p.* √q. 205 *m.* 1q.

1q *p.* 205 *m.* 1q.
p. √q. 205q *m.* 1qq *p.* √q 205q *m.* 1qq.
Summa 205 *p.* √q. 820q *m.* 4qq.



Hæc ſumma æqualis eſt 361. *Aufero itã vtrinque* 205: *manet* √q. 820 q *m.* 4qq, *æqualis* 156: *hoc eſt*, √q. 820 q *m.* 4qq, *æquales* 24336. *Vtraque enim æquationis pars ad*

ad quadratum ducendi. Ac tranſpoſitis partibus, erunt 4qq *æqualia* 820 q *m*. 24336: *Ac demum* 1qq *æquale* 205q *m*. 6084. *Huius Radice educta prodibunt* 36, *æſtimatio* 1q: *ſcilicet, Quadratum ſegmenti AC: cuius Radix*, 6. *Hæc* 36 *ablata à* 205, *relinquunt* 166, *Quadratum ſegmenti CB: Cuius Radix*, 13. *Duo igitur numeri* 6 & 13, *ſunt quos quæſiuimus.*

Aliter. Sumpta pro alterutro numerorum, 1℞: *pro altero verò* ✓q. 205 *m*. 1q: *ducemus* ✓q. 205 *m*. 1q *in* 1℞: *fiet* ✓q. 205q *m*. 1qq, *æqualis* 6084, *vt priùs. Aliter rurſus. Quum totius lineæ AB potentia ſit* 361, *numerus Quadratus, cuius Radix*, 19: *erit ſecundus, vtpote ſegmentum CB*, 19 *m*. 1℞: *quorum quadratum* 361 *p*. 1q *m*. 38 ℞, *erit æquale* 205 *m*. 1q: *Et per tranſpoſitionem & ſubductionem, erit* 2q *æquale* 19 ℞ *m*. 78. *Sed rariſſimè fit vt Quadrata Geometrica incidant numeris Rationalibus æqualia, niſi de induſtria effingantur.*

Quæſtio II.

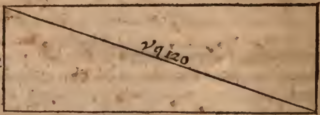
Superficies Quadrangula rectangula, eſt ✓q144 (*ea ſunt* 12) *Diameter verò*, ✓q26: *Quanta ſunt duo latera angulum continentia? Hoc Exemplum proponit Stifelius, capite* XI *ſuæ Algebræ: numeros tantùm mutauimus. Ad cuius explicationem ſibi aſciſcit celebrem illam Propoſitionem quadrageſimam ſeptimam libri primi Elementorum. Quod & nos faciemus, ſed Exemplum ipſum clariùs expoſituri.*

Ex ipſa itaque Propoſitione notum eſt, Quadratum Diametri eſſe æquale Quadratis duorum laterum. Proinde quum Diameter ſit ✓q26, *ipſa ambo Quadrata iuncta, faciunt* 26. *Quare quid aliud quàm diuidemus* 26 *in duos numeros, qui inter ſe multiplicati faciant* 144? *Horum enim Radices exhibebunt duo latera quæſita. Neque quicquam refert quòd* ✓q 144 *ſit numerus rationalis. Nam in hac noſtra ſpecie res in idem perpetuò recidit.*

Igitur pro altero Quadratorum ponatur 1℞: erit alterum, 1℞ m.26. Hæc multiplico inter ſe: proueniunt 26 ℞ m. 1q, æquales 144: hoc eſt, 1q æquale 26 ℞ m. 144. Cuius complexi maior Radix, eſt 18: minor verò 8. Erit igitur maius latus, √q18: alterum, √q8. Quæ inter ſe multiplicatæ, faciunt √q 144, ex Quæſtionis præſcripto.



Alterum Stifelij Exemplum. Superficiei quadrangulæ Rectangulæ maius latus triplum eſt minoris lateris: Diameter verò, eſt √q 120. Quanta eſt ipſa area?

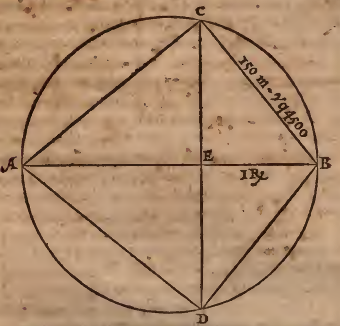


Minus latus eſt 1℞: maius verò, 3℞: Duo quadrata faciunt 10q, æqualia 120. Quapropter 1q facit 12, Quorum Radix, √q12, eſt minus latus, & maius erit √q108. Eritque area, √q1296: hoc eſt, 36.

Quæſtio III.

Diameter Circuli diuiditur ſecundum mediam & extremam rationem, ſeu, vt vulgò dicitur, ſecundum proportionem habentem medium & duo extrema. Et per punctum diuiſionis, linea recta

recta ad angulos rectos vtrinque educitur ad peripheriam. Subtenſa verò quæ Triangulum rectangulum perficit, eſt 150 *m.* ℞q 4500. *Quæro quanta ſit diameter, & quanta cæterarum linearum vnaquæque.*



Huius Exempli deductio vniuerſam ferè Denominatorum & Irrationalium Compoſitorum præceptionem complectitur. Quapropter à nobis prolixiùs explicabitur. Sit itaque Diameter A B, Circuli A B D A, diuiſa vt proponitur, idque ad angulos rectos, per lineam CED, in puncto E: & ducantur ſubtenſæ AC, CB: BD, & DA. Tum pro EB, minore Diametri portione, ponatur 1℞. *Et quia eſt BE ad EA vt EA ad BA, ex poſitione: in Triangulo autem ACB ab angulo C (qui rectus eſt, per Propoſitionem tertij Elementorum trigeſimam ex commentatione noſtra) deducitur perpendicula-*

ris CE: erit ex Conſectario octauæ propoſit. libri ſexti eorundem, vt BE ad EA, ita CB ad BA: ob id per nonam Quinti, æqualis eſt CB ipſi CA. Erit igitur & AE, 150 m. √q 4500. Quapropter CE, medium proportionale inter BE & EA, erit √q 350℞ m. √q 4500qq; productum ſcilicet ex ductu BE in EA. Erit & idipſum CE, √q. 27000 m. √q 405000000 m. 1q. Scilicet, à Quadrato CB, quod eſt, 27000 m. √q 405000000, auſero quadratum 1℞, quod eſt 1q, fiunt 27000 m. √q 405000000 m. 1q. Quorum Radix, eſt æſtimatio ipſius CE, per XLVI Propoſit. primi Elementorum. Quapropter erunt ex duæ Radices, √q. 150℞ m. √q 4500q & √q. 27000 m. √q 405000000 m. 1q, æquales inter ſe: & tranſpoſitis ritè partibus, erit 1q æquale huic Complexo, 27000 m. √q 405000000 m. 150℞ p. √q 4500q: Cuius Radix, eſt √q 40500 m. 150. Ac tanta EB, minor Diametri pars. Et quia EA, maior eiuſdem pars, facit 150 m. √q 4500: Adde √q 40500 m. 150 ad 150 m. √q 4500 (ſcilicet ſubducenda √q 4500 à √q 40500) fiet √q 18000, Diametri æſtimatio. Duc poſtmodùm ambas Diametri partes inter ſe, ſcilicet √q 40500 m. 150, in 150 m. √q 4500. Producti Rad. erit ipſius CE æſtimatio: nempe √q. √q 1620000000 m. 36000. Tum vt habeatur AC, adde √q 1620000000 m. 36000, quod eſt quadratum CE, ad 27000 m. √q 40500000 (hoc verò nil aliud eſt, quàm ſubducere 27000 à 36000, & √q. 405000000 à √q 1620000000) Producti Radix, erit ipſius AC æſtimatio: ſcilicet, √q. √q 405000000 m. 9000. Patent itaque omnium linearum quantitates.

Et quia paulò antè reperimus 1q æquale huic aggregato, 27000 m. √q 405000000 m. 150℞ p. √q 4500q: leuabimus lectorem ad Radicem exprimendam. Imprimis intelligatur ipſum aggregatum, inſtar Diminuti numeri Denominati: hoc eſt, ſic

ſumatur

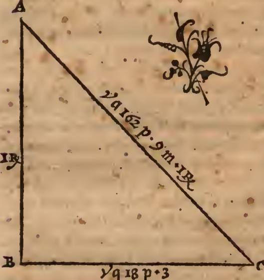
ſumatur tanquam duabus particulis conſtet: quarũ prior, 27000 m. √q405000000, pro numero abſoluto habeatur: altera, m. 150℞ p. √q40500q, pro numero ſimplici Denominato: ſcilicet 150 p. √q40500 habeatur pro numero Radicum. (Numerum enim Radicum eſſe ſic oſtendo, Sumo hunc numerum, 1q 16q. Aio √q16 eſſe numerum Radicum, qualem requirit extractionum Regula: & dimidium ipſius, ſcilicet √q4, eſſe dimidium numeri Radicum. Facio Radicem eſſe 3: tum 16q erunt 144: quapropter erunt æquales √q16q & √q144. Quumque √q144 ſit 12: & 12 efficiant 4℞: erit √q16q æqualis 4℞, ob idque eorum dimidia æqualia. Atqui 2, dimidium eſt numeri 4℞: & √q4, dimidium numeri √q16q. Quum igitur 2 & √q4 ſint æqualia: erit √q4, dimidium numeri Radicum: quod erat oſtendendum.) Sumo, inquam, dimidium numeri Radicum, ſcilicet dimidium 150 m. √q4500q: quod eſt, 75 m. √q1125: Hoc ipſum duco in ſe, fiunt 6750 m. √q25312500: hæc addo ad 27000 m. √q405000000: fiunt 33750 m. √q632812500. Huius aggregati, quod eſt Reſiduum primum, inueſtigenda Radix, vt ab ea auferatur dimidium numeri Radicum. Ea Radix erit √q28125 m. 75, per ea quæ hoc libro præcepimus in extractione Radicum è Binomiis. Ab hac Rad. aufero 75 m. √q1125, Dimidium numeri Rad. ſuperſunt √q40500 m. 150: Quæ fuit Radix paulò antè aſſignata.

Alia Exempli deductio. Quum conſtet ex decima ſeptima Propoſit. Sexti Elementorum, quod fit ex B E, minore ſegmento, in totam B A, eſſe æquale quadrato mediæ E A: & ipſa E A faciat 150 m. √q4500 (quorum quadratum eſt 27000 m. √q405000000) pono, vt priùs, pro minore ſegmento, 1℞. Tum tota Diameter A B, erit 150 m. √q405000000 p. 1℞: Quod complexum ſi ducatur in 1℞, producet 150 ℞ m. √q4500q p. 1q. Quare ex reductione erit, vt modò, 1q æquale huic aggregato, 27000 m. √q405000000 m. 150℞ p. √q4500q.

Aliter rurſus. Pro tota Diametro AB, ponatur 1℞. Eritque minor portio, EB, 1℞ m. 150 p. √q 4500. Quum itaque duxerimus 1℞ m. 150 p. √q 4500 in 1℞: fiet productum æquale ipſi EA: eritque æquationis ſcopus idem cum ſuperiore.

Quæſtio IIII.

Eſt Triangulum Rectangulum, cuius vnum latus facit hoc Compoſitum, √q 18 p. 3. Subtenſa verò vnà cum altero latere, facit √q 162 p. 9. Quæro vtriuſque æſtimationem.



Quum ex Propoſit illa XLVII. Primi Elementorum ſæpe inducta, Quadrata duarum linearũ AB & BC ſint æqualia quadrato lineæ AC: ponatur pro latere AB, 1℞. Erit ſubtẽſa AC, √q 162 p. 9 m. 1℞. Tũm quadratũ ipſius AB, quod eſt 1q, & quadratum BC, quod eſt 27 p. √q 648, erunt æqualia quadrato AC, quod eſt 1q p. 243 p. √q 52488 m. 18℞ m. √q 648 q. Et per reductionem, 1q 648 q æquale eſt 216 p. √q 52488 m. 18℞ m. √q 648 q. Quum igitur abſtulerimus √q 648 à √q 52488 (ſunt enim proportione inter ſe noncupla) manebit √q

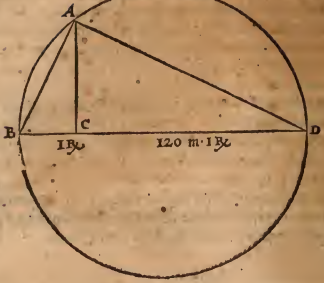
41472

41472. *Quapropter ex ea ſubtractione, quæ reductio quædã eſt, manent 216 p. Vq 41472 m. 18 ℞ m. Vq 648 q, æqualia nihilo. Vt 216 p. Vq 41472 æqualia ſint Vq 648 q p. 18 ℞. Diuidantur itaque 216 p. Vq 41472 per numerum Denominationis maioris, ex ſententia Regulæ Algebræ, ſcilicet per Vq 648 p. 18. Oſtendimus enim paulò ante, Vq 648 q, & ſimiles, eſſe numeros Radicum, non Quadratorum. Ad hanc autem diuiſionem perficiendam, ducendus eſt Diuiſor & Diuidendus in Diminutum ipſius Diuiſoris, ſcilicet in Vq 648 m. 18: prodibit nouus Diuiſor 324: Nouus verò diuidendus, Vq 3359232 p. 1296. Iam diuide priorem particulã per 324, hoc eſt, per Vq 1094976: exibit Vq 32. Rurſus alteram particulam diuide per 324, exibunt 4: erítque numerus Indicans, Vq 32 p. 4. Atque ea eſt æſtimatio 1℞, ſcilicet lineæ AB: Quæ ablata à q 162 p. 9, relinquit Vq 50 p. 5: quæ eſt Subtenſæ AC æſtimatio.*

Quæſtio V.

Circuli Diameter ponitur 120: A puncto verò quopiam ipſius erigitur linea perpendicularis ad peripheriam, quæ facit hunc numerum, Vq. 2925 m. Vq 405000. Quæritur quantum ſit vtrunque Diametri ſegmentum.

Sit itaque AC linea à puncto C, diametri BD, ad rectos angulos erecta ad peripheriæ punctum A: ponatúrque pro BC ſegmento, 1℞. Et erit CD, 120 m. 1℞. Quúmque CA ſit medium proportionale inter BC & CD, per trigeſimam Tertij & octauæ Sexti conſectarium: erit, per decimam ſeptimam eiuſdem, quod fit ex 120 m. 1℞ in 1℞, æquale Quadrato AC. Quare 120 ℞ m. 1q æquabuntur 2925 m. Vq 405000: Et tranſpoſitis partibus, erit 1q æquale 120 ℞ p. 1q 405000 m. 2925. Facit igitur 1℞ 45 m. Vq 450, quæ erit ipſius BC æſti-



matio. Ex quo erit CD, 75 p. √q 450. Tum ſi duxeris AB & AD: erit, ex XLVII *primi Elementorum, ipſa AB, √q 5400 m. √q 6480000: & AD, √q. 9000 p. √q 6480000.*

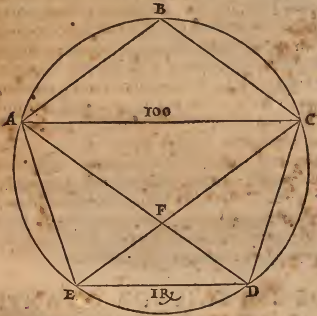
Quæſtio VI.

Proponitur Pentagonum æquilaterum ita deſignatum, vt linea binis quibuſque lateribus ſubtenſa, faciat 100. *Quantum eſt latus Pentagoni?*

Sit ipſum Pentagonum, ABCDE: in quo ducantur tres ſubtenſæ, AC, AD, & CE: vt AD & CE ſe ſcindant in puncto F. Quod itaque fit ex linea AD in CE, æquale eſt ei quod fit ex AC in ED cum eo quod fit ex AE in CD: ſicut demonſtrat Ptolemæus Cap. IX *lib. primi magnæ Conſtructionis.*

(*Quæ*

(Quæ demonſtratio in vniuerſum ſpectat ad omnes figuras Quadrilateras Circulo inſcriptas). Itaque pro latere Pentagoni,



pono 1℞. Tum AE ducta in CD, facit 1q: Et BD in AC, facit 100 ℞. Sed AD in CE, facit 10000: Tres enim lineæ AC, AD, & BE inter ſe ſunt æquales, nempe æqualibus angulis & lateribus ſubtenſæ: Et per tranſpoſitionē, erit 1q æquale 10000 m. 100 ℞. Quorum Radix, eſt Vq 125000 *m.* 50. *Scilicet dimidium numeri Radicum, eſt 50: hæc duco in ſe, fiunt 2500: addo 2500 ad 10000, proueniunt 12500. Quorum Radix,* Vq 12500: *à qua aufero dimidium numeri Rad. manet* Vq 12500 *m.* 50. *Ea eſt æſtimatio lateris Pentagonici quæſita.*

Quod ſic probatur: Linea Pentagoni ſubtenſa faciente 100, ſi latus Pentagoni faciat Vq 12500 *m.* 50, *è contrario, oportet*

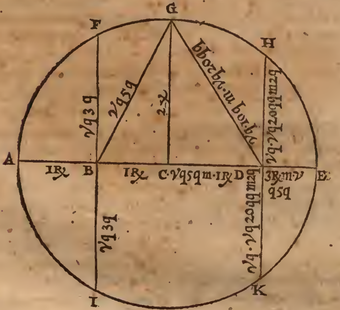
latere Pentagoni faciente ℟q 12500 m. 50, lineam ſubtenſam facere 100. Videamus itaque an quemadmodum ex 100 prouenit ℟q 12500 m. 50, ſic ex ℟q 12500 m. 50, redeant 100. Atque ea gratia fingamus A C lineam eſſe incognitam: pro qua ponatur 1℞. Tum A C ducta in C E, faciet 1q: quum ambæ ſint æquales. Ducatur itaque, ex Ptolemæi ſententia, E D in A C: fiet ℟q 12500 q m. 50 ℞. Deinde latus Pentagoni, ſcilicet ℟q 12500 m. 50, in ſe: fiunt 15000 m. ℟q 125000000. Atque his duobus, ſcilicet ℟q 12500 m. 50 ℞ & 15000 m. ℟q 125000000, æquale eſt 1q. Iam itaque educenda eſt Radix ab hoc Connexo, ℟q 12500 q m. 50 ℞ p. 15000 m. ℟q 125000000. Scilicet, vt ſtudioſos leuemus, Dimidium numeri Radicum, eſt ℟q 3125 in 25: Hoc duco in ſe, proueniunt 3750 m. ℟q 7812500: His addo 15000 m. ℟q 125000000: fiunt 18750 m. ℟q 195312500: Huius aggregati Radix, eſt 125 m. ℟q 3125: quam addo ad dimidium numeri Rad. nempe ad ℟q 3125 m. 25: fiunt 100, Quod fuerat conſtitutum.

DE INVENIENDA QVANTITATUM Continuarum æſtimatione per Numeros huius artis.

CAP. XXIX.

QVoniam initio prioris voluminis præfati ſumus, Algebræ vſum ſingularem in inuentione quantitatum Continuarum conſiſtere: nos hoc loco ex Stifelio figurabimus lineas in Circulo varias, earúmque æſtimationem ad calculum reuocabimus. Cuius deſcriptionis exemplo, Qui Geometriæ non expertes erunt, alias ſibi omnis generis fingere poterunt.

Sumatur itaque diameter Circuli, quæ in partes quatuor diducatur. Et earum vnaquæque ponatur eſſe 1℞: *quomodo duas quartas A B & B C ſignatas vides. Erítque C G*, 2℞, *vtpote ſemidiameter. Tum quia B G ducta, fit Radix duorum ſimul quadratorũ B C & C G, per* XLVII *primi Elementorũ, duo verò ipſa quadrata, ſunt* 5 q: *commodè ipſa B G ſignabitur*, V q5q.



Haud diſsimiliter nota erit B F perpendicularis ad peripheriam educta, ipſiúſque æqualis B I. Intelligatur enim Semidiameter C F, cuius quadratum, eſt 4q: *à quo ſi auferatur quadratum B C, nempe* 1q, *manebunt* 3q *pro ipſo B F quodrato. Quapropter erit linea B F*, V q 3 q. *Addemus poſtmodùm C D ad BC, vt ſit B D æqualis B G: Erítque ex demonſtratione Ptolemæi cap.* IX *lib.*

Primi magnæ Conſtructionis, ut linea B C ablata à linea B G, relinquat latus Decagoni Circulo inſcribendi: Atque idipſum erit C D: ob idque, ipſum C D ſignabimus, √q 5 q *m.* 1℞. *Et quia quadratùm D G æquale eſt duobus quadratis C D & C G, quadratum verò C G, eſt* 4 q, *& quadratum C D eſt* 6 q *m.* √q 20 qq *(atque hoc loco reducitur* 1℞ *ad* √q 1 q *) rectè ipſa D G ſignabitur,* √q 10 q *m.* √q 20 qq. *Tum intellecta C H ſemidiametro, cuius quadratum eſt* 4 q, *à quo ſi auferatur quadratum C D (quod eſt* 6 q *m.* √q 20 qq.*) manebit quadratum D H: ſignabimus ipſam D H* √q. √q 20 qq *m.* 2 q. *Et quia tota diameter A E facit* 4℞ *& A B,* 1℞: *erit B E,* 3℞. *Quòd ſi ex B E auferatur B D, quod eſt æquale B G, facitque* √q 5 q: *erit D E,* 3℞ *m.* √q 5 q.

Iam verò per numeros, æſtimationem ſignorum eliciamus. Sit ipſa Diameter Circuli, verbi gratia, 40. *Tum* 1℞, *nempe quarta quæque pars, faciet* 10. *Ex qua cæteras lineas examinare non erit difficile. Ut ſi quæratur lineæ B C, quæ ſignatur* √q 5 q, *æſtimatio: quum* 1℞ *ſit* 10, *conſtat* 1 q *eſſe* 100. *Et erunt* 5 q, 500: *quapropter erit ipſa B G,* √q 500. *Si verò quæratur numerus lineæ D G, cuius ſignum eſt,* √q. 10 q *m.* √q 20 qq: *ſcimus* 10 q *valere* 1000, *&* 20 qq *valere* 200000: *quare erit ipſa D G,* √q. 1000 *m.* √q 200000. *Ea ratione erit nota D H, cuius ſignũ, eſt* √q. √q 20 qq *m.* 2 q. *Erit quippe* √q. √q 200000 *m.* 200. *Atque eodem modo ad reliquarum linearum æſtimationem ratiocinabimur.* *Quinetiam ut figuræ uſus illuſtrior ſit, proponuntur tres Circuli, quorum primi Diameter ſit* 120: *alterius,* 48: *tertij verò,* 36. *Horum cuique inſcribendum eſt Pentagonum æquilaterum. Quod ex hac noſtra deſcriptione ſic conſiciemus. Quoniã primi Circuli Diameter eſt* 120, *ob idque* 1℞, 30: *erit* 1℞ 900 *&* 1 qq; 810000. *Et quid in deſcriptione iam expoſita, latus Pentagoni ſignatur* √q. 10 q *m.* √q 20 qq: *pro* 10 q *ſumemus* 9000: *& pro* 20 qq, *ſumemus*

16200000:

16200000: *Quare in Circulo cuius Diameter poſita eſt* 120, *erit latus Pentagoni,* √q. 9000 *m.*√q 16200000.

Ex iis ſatis notum erit latus Pentagoni in altero Circulo, cuius Diameter eſt, 48. *Hic enim* 10q *ſunt* 1440: & 20qq, 414720. *Quare erit ipſum latus,* √q. 1440 *m.* √q 414720. *Diametro autem faciente* 36, *latus Pentagoni erit* √q. 810 *m.* √q 131220.

Hinc ſtatim innoteſcit latus Decagoni, ſcilicet linea CD. *Latus verò Hexagoni ſemper eſt Semidiameter Circuli.*

Amplius, Proponitur hic numerus, √q. 90 *m.* √q 1620 *in latus Pentagoni: atque ex hac dimenſione eritu rquanta ſit Diameter Circuli Pentagono circunſcribendi. Ex ſuperioribus ſtatim colligo* √q. 10 *m.* √q 20qq *æquari* √q. 90 *m.* 1620: *ob id, eorum quadrata æqualia. Igitur* 10q *m.* √q 20qq *æquantur* 90 *m.* √q 1620. *Diuido itaque* 90 *m.* √q 1620 *per* 10 *m.* √q 20, *exeunt* 9: *ſicut in ſubiecta formula aſſcriptum vides.*

90 *m.* √q 1620
10 *m.* √q 20 (9. *Vbi animaduertendum, multiplicationem ſecundæ particulæ Diuiſoris, fieri debere per* √q 81. *Quum igitur* 1q *ſit* 9: & 1℞ *ſit* 3: *erit tota Diameter,* 12. *Eodem modo cæteræ inſcriptiones perficientur, pro linearum æſtimatione.*

Q

Ac quemadmodum Binarius index eſt Progreſsionis Quadratorum: ita Senarius, Cuborum: idq́ue interueniente ſemper Vnitate, vt in Quadratis. Scilicet, ſecundus Cuborum, 8, à primo Cubo, nempe ab 1, diſtat Senario vno. Tertius verò, 27, à ſecundo, 8, diſtat duobus plus Senariis quàm ſecundus à primo, nempe tribus. Quartus, 64, à tertio, 27, abeſt plus tribus Senariis quàm tertius à ſecundo, nempe ſex. Quintus, 125, à quarto, 64, plus 4 Senariis quàm quartus à tertio, nempe 10 Senariis. Atque huic Senariorum augmento ſemper accedit Vnitas, vt diximus.

Hinc exurgit Regula, Duc Radicem cuiuſcunque Cubi in numerum vno maiorem: productum triplica: ad triplum adde 1: totum adde ad Cubum: exibit Cubus proximus. Vt, Quæro numerum proximè Cubicum à 1000, quorum Radix Cubica, 10. Duco 10 in 11, fiunt 110: Hæc triplico, fiunt 330: quibus addo 1, fiunt 331: hæc addo ad 1000: fiunt 1331, Cubus proximus à 1000. Multa alia cognitu iucunda occurrent iis qui ſe in Numerorum ſpeculatione exercebunt. Quorum vnum eſt, Primo Cuborum adde ſecundum: fit numerus Quadratus, 9: huic adde tertium Cubum, 27: fiunt 36, numerus quadratus: his adde quartum Cubum, 64, fiunt 100, numerus quadratus: ſicq́ue continuè. Radices autem progrediuntur augmento naturali, ducto initio à ternario: ſcilicet 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36. Sed eiuſmodi ſpeculationes infinitæ ſunt. Horum igitur ordinationem ſubſcriptam dedimus ſtudioſis ad ſpeculandum.

℞.	q.	c.
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729
10	100	1000
11	121	1331
12	144	1728
13	169	2197
14	196	2744
15	225	3375
16	256	4096
17	289	4913
18	324	5832
19	361	6859
20	400	8000
21	441	9261
22	484	10648
23	529	12167
24	576	13824
25	625	15625
26	676	17576
27	729	19683
28	784	21952
29	841	24389
30	900	27000

Rx.	q.	c.
31	961	29791
32	1024	32768
33	1089	35937
34	1156	39304
35	1225	42875
36	1296	46656
37	1369	50653
38	1444	54872
39	1521	59319
40	1600	64000
41	1681	68921
42	1764	74088
43	1849	79507
44	1936	85184
45	2025	91125
46	2116	97336
47	2209	103823
48	2304	110592
49	2401	117649
50	2500	125000
51	2601	132651
52	2704	140608
53	2809	148877
54	2916	157454
55	3025	166375
56	3136	175616
57	3249	185193
58	3364	195112
59	3481	205379
60	3600	216000

R.	q.	c.
61	3721	226981
62	3844	238328
63	3969	250047
64	4096	262144
65	4225	274625
66	4356	287496
67	4489	300763
68	4624	314432
69	4761	328509
70	4900	343000
71	5041	357911
72	5184	373248
73	5329	389017
74	5476	405224
75	5625	421875
76	5776	438976
77	5929	456533
78	6084	474552
79	6241	493039
80	6400	512000
81	6561	531441
82	6724	551368
83	6889	571787
84	7056	592704
85	7225	614125
86	7396	636056
87	7569	658503
88	7744	681472
89	7921	704969
90	8100	729000

Rx.	q.	c.
91	8281	753571
92	8464	778688
93	8649	804357
94	8836	830584
95	9025	857375
96	9216	884736
97	9409	912673
98	9604	941192
99	9801	970299
100	10000	1000000
101	10201	1030301
102	10404	1061208
103	10609	1092727
104	10816	1124864
105	11025	1157625
106	11236	1191016
107	11449	1225043
108	11664	1259712
109	11881	1295029
110	12100	1331000
111	12321	1367631
112	12544	1404928
113	12769	1442897
114	12996	1481544
115	13225	1520875
116	13456	1560896
117	13689	1601613
118	13924	1643032
119	14161	1685159
120	14400	1728000

℞.	q.	c.
121	14641	1771562
122	14884	1815848
123	15129	1860867
124	15376	1906624
125	15625	1953125
126	15876	2000376
127	16129	2048383
128	16384	2097152
129	16641	2146689
130	16900	2197000
131	17161	2248091
132	17424	2299968
133	17689	2352637
134	17956	2406104
135	18225	2460375
136	18496	2515456
137	18769	2571353
138	19044	2628072
139	19321	2685619
140	19600	2744000

IACOBVS PELETARIVS
Seraphino Razallio Iuriſconſulto S.

ETſi non ita pridē inter nos contracta eſt familiaritas, Razalli, tamen ex ea tātam delectationem capio, vt mihi nihil charius, nihil antiquius eſſe poßit. Morū enim illa ſuauitas, quam in te ſumma cum doctrina coniunctam perſpicio, veteris amicitiæ iura abunde ſupplet. Magna verò ad meum in te amorem acceßio facta eſt, ex quo tempore ad iuriſprudentiæ veſtræ ſtudium, artes Mathematicas adiungere cœpiſti, de quibus quotieſcunque inter nos incidit diſputatio (incidit autem ſæpe, ac de Geometria potiſsimè) hortaris, imò vrges vt Buteonis cuiuſdam calumnias à me depellam. Quod profectò & meæ naturæ, quæ ad modeſtiam me effinxit, & meæ exiſtimationi, quæ apud bonos viros vt in pretio eſſet perpetuò ſtudui, alienum eſſe duco. Quid enim operam meam abutar, dum maleuoli iſtius maledictis reſpondeam? quem ne appellatione quidem dignum exiſtimare debeo: vſqueadeo me hominis pudet, quòd inter Mathematicos nomen profitetur ſuum: qui nulla vnquam à me laceßitus iniuria, tam petulāter in me, imò verò in totam Geometrarum nationem inuehitur. Atque is ipſe poſtquam, vt putat, nos vltus eſt probè, bonis ſcilicet verbis inuitat me ad reſpondendum. Si, inquit, viderit Peletarius præter verum iſta notari: ſuam, vt par eſt, ſententiam reſponſo tutabitur. Eſt enim literaria concertatio, cùm ad excitandum ingenij vigorem ſtimulus acer, tum ad intelligentiam rerum non inutilis. Iſta quum dicit Buteo, quid aliud quam ſe ſuæ calumniæ conſcientia prodit? In demonſtrationum ſcientia, quid opus eſt concertatione? in qua veritas ipſa ſui teſtimonium apertè præbet. Ad hæc, quonam ſtimulo vigorem ingenij excitabo homini, qui neque iudicio ſcribit, neque

ingenio reprehendit, ſed animi morbo? dum in Mathematicarum argumento nos coram Grammaticis cauſam dicere vult. Calepinos, Alexandros, Deſpauterios, & ſi qui ſunt inferioris ordinis, facit nobis Geometriæ magiſtros: quum interim literator iſte neſciat tria verba bene Latina continuare. Quid dico bene Latina? immò verò qui in Grammaticæ rudimenis ſubinde peccet.
Logiſtica pag. 122, lin. 4. *Quos ludos mihi præbet dum apud ipſum lego, nouem quadrata æqualia toto: & dimenſionem vnam additam dimenſioni alteræ. Quid quòd in Orthographiam ipſam committit? facere men-*
Logiſt. pa. 126. lin. 4. *ſionem vbique per ſ literam ſcribit: & exagerare, lipitudo, ſimplici conſonante. In Syntaxi verò quàm ſit peritus, videamus.*
Logiſtic. libr. 3, probl. 4. *Numerum, inquit, inuenire qui ductus in 2, & à producto ſublatis 6, reſiduum fiat 10. Et alibi, Quingenti milites ſtipendio ſe-*
Log. lib. 4. Quæſt. 1. *meſtri aureos nouem milia capiunt. Cuiuſmodi locutionibus, Logiſticæ ipſius Quæſtiones ſcatent: quas vndique ex Arithmeticorum vulgaribus qui circunferuntur, Libris corraſit, vt ſuas paginas infarciret, & nauſeam lectoribus moueret. Algebræ vocem reiicit, vt Quadraturam ſupponat. Illa verò quamuis peregrina ſit, tamen quia propriȷ nominis inſtar eſt, in quauis lingua locum habet. Quadraturam autem quis vnquam Latinorum vſurpauit? præter id, quòd non eſt ad hanc rem ſatis integra quadrandi ſignificatio. Algebra enim non Quadratos tantum numeros, ſed & Cubos, & Biquadratos reſpicit. Cuius rei Buteo ſe in præclara ſua Quadratura prorſus ignarum oſtendit. At Græcè doctus eſt. Certè: qui exagonum ſine ſpiritus nota, qui Pros orthos vbique elementis Latinis ſcribit: qui vocem Quidecagoni (Quindecagonum puto dicere voluiſſe) duarum linguarum charactère adulteratam nobis inuehit: ne ſcilicet à Peletario quicquam mutuatus eſſe videretur. Ego enim in quarto Elementorum Quindecangulum dixi, doctorum, vt puto, auribus non abſurdum. In Logiſticæ voce quàm ſibi placet egregius iſte verborum conquiſitor & artifex, qui eam à ſe primùm*

ad nos

ad nos adductam gloriatur. Quod vt verè diceret, quid eſſet tamen quod ex re tam exigua ſibi laudem aſſumeret? Sed eam ipſam Eraſmus Reinoldus iam antè vſurpauerat: vt tu ſcis, qui viri ſcripta nunc habes in manibus: qua ipſe valde appoſitè vtitur, dum calculum Aſtronomicũ inſcribit Logiſticam ſcrupulorum Aſtronomicorũ. Vox enim Logiſtices, omnem vniuerſè Ratiocinationem ſignificat: neque ſolitariè poni debet, quemadmodum ineptè poſuit Buteo. At in arte peracutus. Scilicet, dum ſtatim initio ſuæ Logiſticæ, ſtatuit millionem millionum decimo loco Numerationis: dum in refellendo Hipocratis Chij Tetragoniſmo, Quadratum Circulo admouet, vt amborum inæqualitatem probet: adeo obſtinatè operam dat, non vt veritatem exprimat: ſed vt mihi aduerſetur, qui eiuſmodi applicationes ad quartam primi Elementorum improbauerim. Iam verò quo iudicio & quàm ſapienter ratiocinetur Buteo, vna argumentatione colligamus. Demonſtrationes, ait, quæ ad Propoſitiones Euclidis apponuntur, Theonis non ſunt, ſed Euclidis ipſius: quod ſic oſtendit ex Proclo. Neque enim Euclides, inquit Proclus, quæ proponuntur inuenit: ſed Elementa colligens, multa quidem ab Eudoxo diſponens, multa ex Theæteto perficiens: inſuper autem & quæ à prioribus fuerant oſtenſa pinguius, ad demonſtrationes ἀνελέγκτους ipſe redegit. Et paulò antè, Quis enim apud antiquitatem omnem Theoremata vidit vnquam ſine Demonſtratione proferri? Hactenus Buteo. Ego verò ex Buteone ratiocinor ad hunc modum, Quæ antiquorum ſunt Problemata & Theoremata, ab iiſdem omnia demonſtrata ſunt. Quæ ab Euclide proponuntur Problemata & Theoremata, Euclidis non ſunt, ſed antiquorum Eudoxi & Theæteti. Adſit Buteo vt colligat quod colligi debet: nam vtranque propoſitionem agnoſcere cogetur ſuam. Sed quid aliud efficiet, quàm quæ proponuntur ab Euclide Problemata & Theoremata, ab antiquis eſſe demonſtrata? Ex Buteone igitur, Eudoxi & Theæti, Demonſtrationes

Initio Errorũ interpretum.

ſunt, nõ Euclidis? quanuis Eudoxo & Theæteto alij antiquiores extiterint quibus Demonſtrationũ autoritas debetur. Geometriæ enim conſtructio, temporum memoriæ ſubiecta non eſt, ſicut in hac noſtra Algebra præfati ſumus. Vides, mi Razalli, quò ſe Buteo præcipitem ferat, maledicendi ſtudio. Ego in Epiſtola ad Fernelium, Demonſtrationes pleraſque omnes Theonis non eſſe dico: ſed neque Propoſitionum autorem eſſe Euclidem, niſi ſiquæ ab ipſo demonſtratæ ſint: quæ verò ſint eæ, ignoramus: Ea re, ordinẽ duntaxat & collocationẽ Euclidi aſſcribimus: quanuis & ante ipſum multi Elementa redegiſſent. Quid igitur Theoni attribuemus? nimirum Demonſtrationum concinnitatem, & teſtimonia ampliora, ad confirmandas Propoſitiones accommodata. At Buteo dum in meam ſententiam obnititur, in laqueos ſe conijcit, quibus meæ opinioni aſſentiri & ſuam abiurare inſciens cogitur. Hæc ego in Buteonem feſtinanter animaduerti, & fortuitò verſis paginis excerpſi. Nam in ea quæ attentione indigebant, non fuit otium inquirendi. Totus ſum in Medicina. Ex hac enim ſpero vnicum meis laboribus præmium eſſe conſtitutum. Neque adeo ſi otium fuiſſet, in tam parua laude poſuiſſem. Ab iis enim contentionibus quæ publicè ſuſcipiuntur ad contumeliam, planè abhorreo: priuatas admonitiones amo: & publicè gratiam habendam eſſe duco. Tu ex iis paucis quæ obſeruauimus, de noſtro calumniatore tecum rationem inibis, quam lecto eius opere conficies. Cæteris hominibus relinquo ſtatuendam, an qui tali ingenio ſit præditus, vel quæ recta ſunt cernere, vel quæ praua ſunt, redarguere poſſit. Nam quòd mihi literarum Græcarum peritiam detrahit, nullam cauſam habet niſi quam ſibi per malitiam fingit. Vtrum Euclidem intellexerim an non, Demonſtrationes meæ teſtantur: Vtrum Galenum necne, nos etiam propediem, Deo iuuante, declarabimus. Nihil hactenus ſtudiis meis defuit ab ignorantia linguarum. Tandiu ego multis hominibus parũ Latinus habitus ſum, quandiu Gallicè ſcripſi. Mea ſic

fuit

fuit ſemper ratio, vt de mei ingenij eruditione, mihi priùs ſatisfaciendū eſſe duxerim quàm hominū cuiquam. Licet enim linguarum cognitionem præ rerum perceptione parui fecerim ſemper: tamen pudore mihi eſſet pereundum, ſi tam inſcienter quicquam oſtentaſſem, quàm oſtentat Græculus iſte qui dum ex alieni nominis inuidia laudem ſibi affectat, nil aliud quàm doctis, atque iiſdem probis viris ſtomachum mouet. Quæ res efficit, vt verear ne meæ exiſtimationi & candori notam aſperſerim, quòd mihi imperare non potuerim, quin maledicum hominem referirem. Sed in hac cauſa dabunt, vt ſpero, mihi veniam qui æquiores erunt: & culpam in iſtum meritò transferent, qui initium introduxit. Nemo enim tam ad modeſtiam bene compoſitus, qui talium hominum importunitate laceſſitus non incandeſcat. Ego verò vt iam meo more, id eſt ingenuè, loquar: non inficior me ex Buteonis inſimulatione meliorem eſſe factum. Nam quemadmodum ex Galeno didici Platoni ſubſcribente, nullum librum eſſe tam bonum qui calumniæ vim effugere queat: ita ex Plinio, nullum tam malum, ex quo fructum aliquem non reportes, modò adſit iudicium. Sed nihil homine Philoſopho, ne dicam Mathematico, indignius eſſe poteſt, quàm ſint maledicta, contumeliæ concertationéſque pertinaces, non veritatis peruestigandæ, ſed contradicendi ſtudio quæſitæ. Si honeſtè mecum egiſſet Buteo, ſi me per literas, vt debebat, monuiſſet: ſi denique boni viri officio functus eſſet, quàm grato animo, ſiquid ipſe rectè animaduertiſſet, accepiſſem! vt hominem fouiſſem! vt in ſinu geſtaſſem! quàm benignè etiam quæ nimis attente notaſſet, interpretatus eſſem! Ego enim me reprehenſoribus expoſui volens: quod in meis Epiſtolis profiteor: ſed de calumniatoribus nihil omnino ſuſpicabar. De Elementis verò Geometricis tibi ego, Razalli, obiter & iudicium & conſilium meum expoſui. Quædam enim à me conſultò emiſſa ſunt, quæ poſtrema manu non tractaui: quædam emendanda mihi reſeruaui, quæ Buteo ne per ſomnium quidem vn-

quam cogitauit. Demonſtrationum mearum nullam ipſe attigit, quod equidem maximè optabam, præter quartam illam Primi: & quintam Libri Quinti: illam quàm indoctè, res indicat: hanc verò, quàm ſtupidè, ipſe, ſi ſeſe collegerit, recognoſcet, qui nō viderit propoſitionem quæ libro ſexto ex Theone eſſet nona, à me duodecimo locô eſſe poſitam. Sed iam finem facio, ne Apologiam, nō Epiſtolam ſcripſiſſe videar. Vale. Lutetiæ, pridie Non. Nouemb. 1559.

BIBLIO... ECA NAZ. ... VITTORIO EMA...

ERRATA.

In Præfationis Pagina tertia, lin. vt Mathematicas, ſic legendum, vt Mathematicas ad tempus reponerem (niſi quòd Aſtrologiam ſtudioſiùs mihi ſemper reſeruaui) effecerat Medicinæ profeſsio, quam & ipſam illarum gratia iam olim intermiſeram. Hæc tamen tranſpoſitio in reliquis aliquot Exemplaribus ſub pręlo reſtituta eſt.

Charta 1, Pag. 1, lin. Od id lege Ob id
Char. 1, Pag. 2, lin. Secundus lege Creatorum
Char. 4, Pag. 1, lin. Minoris lege addita
lin. Econtrario lege ſubtracta
lin. communi lege addita & ſubtracta
Pag. 2, lin. abſolutis lege diuiſa
Char. 8, Pag 1, lin. quadrata lege p. 15 Quadratis
Char. 10, Pag. 1. lin. 6℞ lege æquales
Pag. 2, lin. lia lege manet q.
Char. 11, Pag 1, lin. Item ſi fuerint &c. hæc Formula
$4℞\,\frac{p}{2}\,18 \quad \frac{12℞\ m\ 5}{1℞}$
8℞ p. 36 12q m. 58℞. ſtatim ſubiici debet iis verbis vt vides in ſubiecta Formula.
Char. 12, Pag. 2, lin. rus lege æquale
Char. 17, Pag. 1, lin. Mercator lege Aureis 7:
Char. 19, Pag. 1, lin. $\frac{7}{2}$ lege $\frac{7}{15}$
Char. 22, lin. cit lege hic Numerus
lin. Iam lege libras, Qui
Char. 23, lin. 1℞ per lege æqualia
Char. 37, Pag. 1, lin. nim indicatur pro 1 $\frac{7}{5}$ lege 1 $\frac{7}{9}$.
Char. 38, Pag 1, lin. Mediale lege fiet numerus Additionis. Exemplum.
Char. 39, Pag. 2, lin. lem. Vt lege fiet.
Char. 49, Pag. 1. lin. 100 p. lege 300 p.
Char. 52, Pag. 1, lin. colligere lege colligere vix potes.
Pag 2, lin. æquè lege æquè Rationalem
Pag. 2, lin. ℽqœ lege valet
Char. 56, Pag. 1, lin. in latus lege quæritur
Char. 57, Pag. 1, lin. primum lege inueſtiganda.